



Sinyaller ve Sistemler

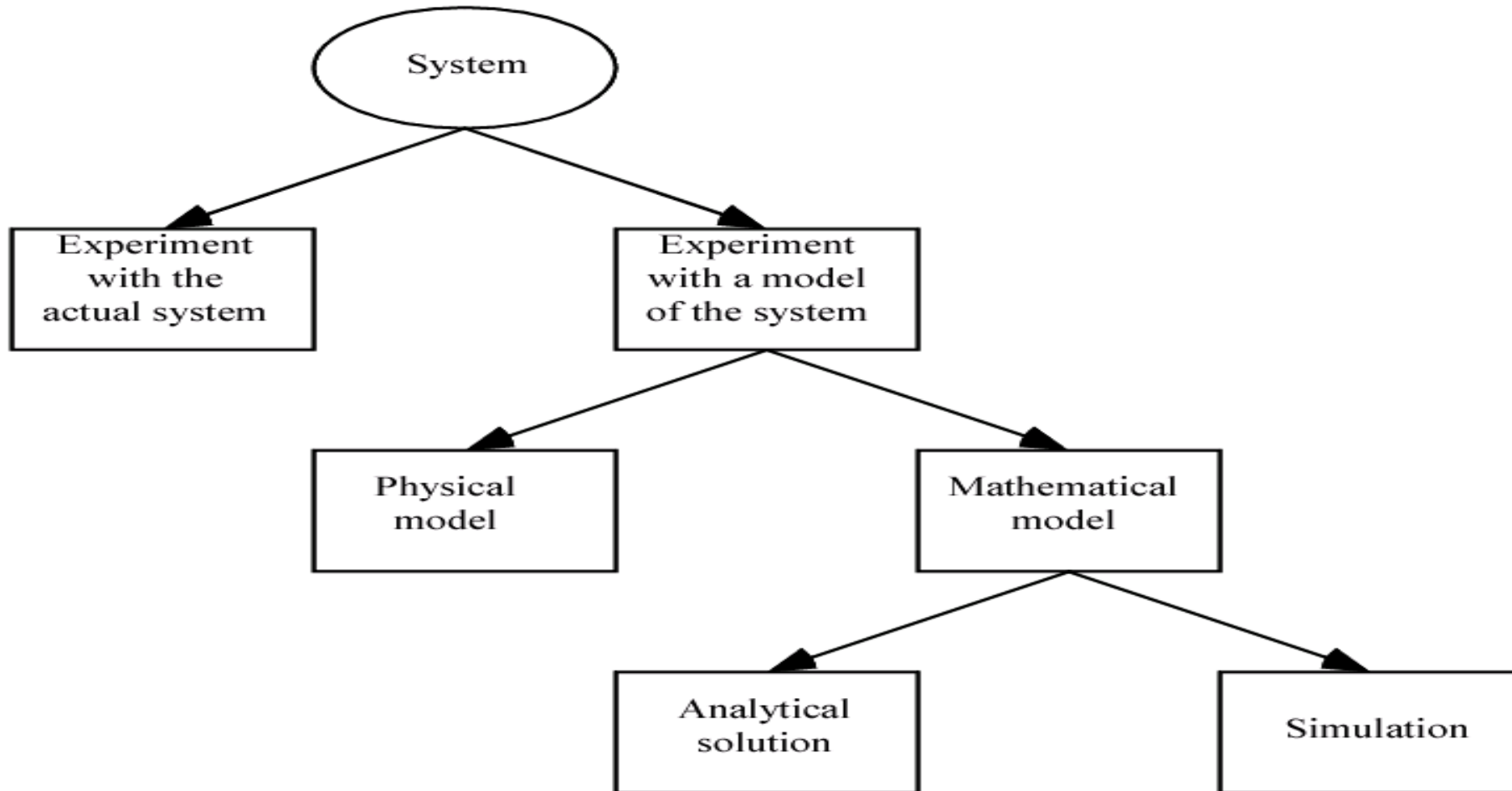
“Sinyaller ve Sistemlerin Matematiksel Modellenmesi”

Dr. Cahit Karakuş, 2020

Model Kavramı

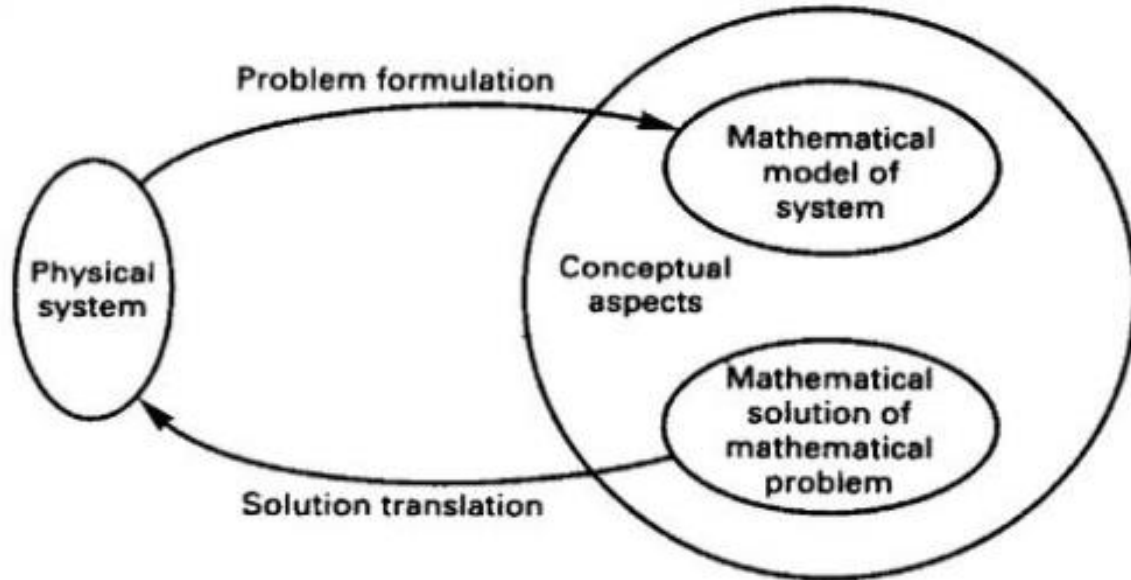
- Model, “gerçek sistemlerin temsili” olarak tanımlanabilir.
- Bu tanımda, “gerçek” ifadesi hem şu anda mevcut sistemleri hem de gelecekteki çalışması olası sistemler için kullanılır.
- **Model geliştirmenin amacı:** sistemin performansını analiz etmek, riskleri ve sapmaları önceden belirlemek, gelecekte kullanılacak sistemin ideal yapısını tanımlamak ve hassasiyet gösterecek giriş değerlerini saptamaktır.
- Modelden elde edilecek çıktıların karar vermede olası değişimleri ve sonuçları ile etkilerini de göstermesini sağladığından karar vericiye kararında yardımcı olur.
- Modeller, özellikle geri bildirim ve doğrusal olmayan süreçler analiz edildiğinde, mekanizmanın anlaşılmasını güçlendirmeye hizmet eder.

How to study a system?



Fiziksel Veri Modeli

- Fiziksel modelleme, üretilecek bir fiziksel sistemin biçimini, fiziksel sinyal kaynaklarını, fiziksel sistemin girişini ve sistemin kendisini ve çıkışını simüle etmek için bir matematiksel model, bir dizi denklem ve algoritma kullanılarak hesaplandığı yöntemleri ifade eder.



- Control systems give desired output by controlling the input. Therefore control systems and mathematical modeling are inter-linked.
- Mathematical models of control systems are ordinary differential equations
- To deal with linear o.d.e, Laplace Transform is an efficient approach.

Matematiksel Modeller

- Bir matematiksel model hiçbir zaman fiziksel bir durumun tam olarak doğru bir temsili değildir - bir idealleştirme.
 - İyi bir model, gerçekliği matematiksel hesaplamalara izin verecek kadar basitleştirmeli ve değerli sonuçlar elde edilecek kadar doğru olmalıdır.
 - Modelin sınırlamalarının, risklerinin ve sapmalarının farkına varılması da önemlidir.
 - En sonunda, doğa kanunlarının da son sözü vardır, unutulmamalı.
- Gerçek dünyada gözlemlenen ilişkileri matematiksel modellemek için kullanılacak birçok farklı işlev türü vardır.
- Matematiksel model çeşitleri:
 - Analitik Çözümler
 - Simülasyon: Gerçek sistemin benzerinin matematiksel modellerle gerçekleştirilmesi
 - Optimizasyon: En iyileme

Mantıksal Veri Modeli

- Mantıksal veri modeli sayesinde iş analistleri ve veri mimarları, operasyonel veya işlemsel süreçleri bir varlık ilişki diyagramında görselleştirebilir.
- Mantıksal veri modelleri, veri nesnelerinin iş paydaşlarının anladığı şekilde nasıl çalıştığını ve işlem yaptığını tanımlar. Bu nedenle, daha sonra dağıtılacakları gerçek veri tabanından bağımsız olarak tasarlanırlar.

Fiziksel Sistemlerin Matematiksel Modelleri

- Otomasyon ve otonom sistemlerinin analizi ve tasarımı için, sistemlerin matematiksel bir tanımının formüle edilmesi gerekir.
- Sistemlerin istenen matematiksel tanımının elde edilme süreci “**modelleme**” olarak bilinir.
- Dinamik fiziksel sistemlerin temel modelleri, uygun doğa yasalarının uygulanmasıyla elde edilen diferansiyel denklemlerdir. Bu denklemler, modellenen fenomene bağlı olarak doğrusal veya doğrusal olmayabilir.
- Diferansiyel denklemler, analiz ve tasarım manipülasyonları için elverişsizdir ve bu nedenle diferansiyel denklemleri cebirsel denklemlere dönüştüren Laplace Dönüşümü'nden yararlanır.
- Cebirsel denklemler transfer fonksiyonu formuna konulabilir ve sistem bir transfer fonksiyonu blok diyagramı olarak grafiksel olarak modellenebilir. Alternatif olarak, bir sinyal akış grafiği kullanılabilir.

Fiziksel Sistemlerin Matematiksel Modelleri

- Matematiksel modeller mekanik, elektrik, hidrolik, pnömatik ve termal sistemler gibi farklı fiziksel sistemlerin diferansiyel denklemleri, transfer fonksiyonları, blok diyagramları, sinyal akış grafikleri vb. ile ilgilidir. Dinamik bir sistemin analizi, performansını tahmin etme yeteneğini gerektirir. Bu yetenek ve sonuçların kesinliği, her bir bileşenin özelliklerinin matematiksel olarak ne kadar iyi ifade edilebildiğine bağlıdır.
- Kontrol sistemlerinin analizi ve tasarımında en önemli görevlerden biri sistemlerin matematiksel olarak modellenmesidir. En yaygın iki yöntem transfer fonksiyonu yaklaşımı ve durum denklemleri yaklaşımıdır. Transfer fonksiyonu yöntemi sadece doğrusal zamanla değişmeyen sistemler için geçerlidir, oysa durum denklemleri transfer fonksiyonlarını ve doğrusal durum denklemlerini kullanmak için ilk sıradadır, sistemin önce doğrusallaştırılması veya çalışma aralığının doğrusal bir aralıkla sınırlandırılması gerekir.
- Lineer kontrol sistemlerinin analizi ve tasarımı iyi geliştirilmiş olmasına rağmen, lineer olmayan sistemler için benzerleri genellikle oldukça karmaşıktır.
- Bu nedenle, kontrol sistemleri mühendisinin görevi genellikle yalnızca bir sistemi matematiksel olarak doğru bir şekilde nasıl tanımlayacağını değil, aynı zamanda daha da önemlisi, gerektiğinde sistemin doğrusal olarak yeterince karakterize edilebilmesi için uygun varsayımların ve tahminlerin nasıl yapılacağını belirlemektir. matematiksel model.

Matematiksel Modeller İle Sistem Oluşturulması

- Lineer Denklemler, Fonksiyonlar, Diferansiyel denklemler
- Analitik Çözümler, Simülasyon, Optimizasyon
- Analitik düşünme becerisi, bir problemi ya da hedefte belirlenen bir konuyu tümdengelim yöntemi ile küçük parçalara ayırarak çözmek anlamına geliyor. Analitik modelleme; problemlerin tespit edilip alt kümelere ayrılmasında, verilerden önemli bilgiler çıkarılmasında ve yaratıcı çözümler geliştirilmesinde önemli rol oynar.
- Yapay Zeka (Makine Öğrenmesi)
- Bu sistemler giriş ya da çıkışları fiziksel sinyaller olabildiği sayısal vektör ya da matrisler biçiminde de sinyaller olabilmektedir.

Geometrik Modelleme

- Geometrik modelleme, giriş ve çıkış sinyallerinin tanımlandığı şekillerin matematiksel tanımı için yöntemleri ve algoritmaları inceleyen uygulamalı matematik ve hesaplmalı geometrinin bir dalıdır.
- Geometrik modellemede incelenen şekiller çoğunlukla iki veya üç boyutludur (katı şekiller), ancak araçlarının ve ilkelerinin çoğu herhangi bir sonlu boyuttaki kümelerle uygulanabilir.
- Günümüzde çoğu geometrik modelleme bilgisayarlarla ve bilgisayar tabanlı uygulamalar için yapılmaktadır.
- Geometrik modeller genellikle, şekli, görünümünü oluşturan opak bir algoritma ile örtülü olarak tanımlayan prosedürel ve nesne yönelimli modellerden ayrılır.

Sistemlerin Matematiksel Modellenmesi

Simülasyon

- Simülasyon, mevcut ya da geliştirilecek gerçek sistemlerin yapısı ve davranışını anlayabilmek için mantıksal ve matematiksel modelleme ile deney yapma olanağı sağlayan algoritma tabanlı bir yazılımsal programdır.
- Algoritma, girişlerden beklenen çıkışı elde etmek için oluşturulan çözüm adımlarının matematiksel modellenmesidir.
- Bilgisayar simülasyonu, gerçek veya teorik bir fiziksel sistemin bir matematiksel modelini tasarlama, gerçek dünyada gibi işlevlerini yerine getirme ve çıktısını analiz etme disiplini. Günümüzde uygulamalı eğitim alanlarında çok yoğun olarak kullanılmaya başlanılmıştır.
- Simülasyon, “gerçek uygulamaları sanal ortamlarda yaparak öğrenme” ilkesini bünyesinde barındırır. Sistem hakkında bilgi edinmek için önce bir çeşit modelin oluşturulması ve ardından modelin çalıştırılması gerekmektedir.

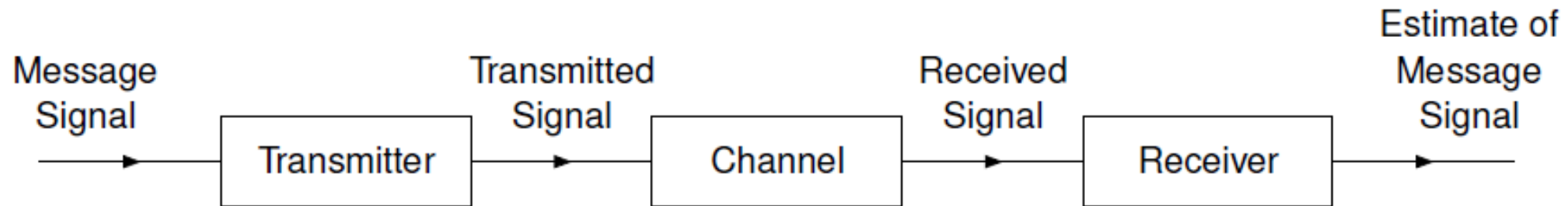
Simülasyonun Özellikleri

- Sistem davranışlarını gözler ve tanımlar.
- Gözlenen davranışlar için geçerli olan teori ve hipotezleri kurar.
- Sistem davranışlarını öngörür.
- Sistemi kontrol etme olanağı sağlar.
- Simülasyon, karmaşık sistemlerin tasarımı ve analizinde kullanılır.

Optimizasyon

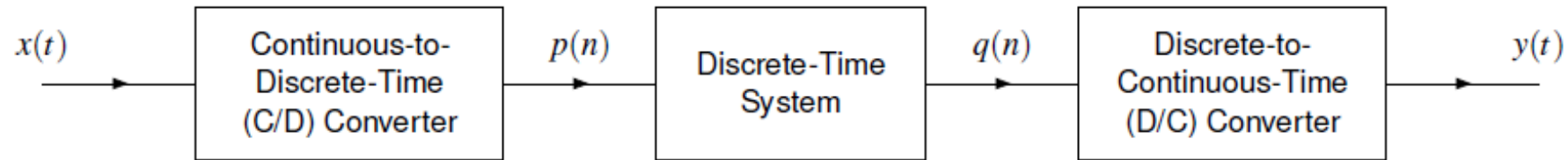
- Optimizasyon: Sistemin performansını, çıkış sinyalin beklenen biçimini iyileştirme ve hassasiyet giriş değerlerini bulma işlemidir.
- Optimizasyon: Bir sistemi oluşturan bileşenlerindeki değişimlerin duyarlılık etkisini belirlemek amacıyla olası tasarım parametrelerinin değişim aralığında, daha iyi veya daha uygun olanların belirlenerek ideal bir sistem örneğini bulma sürecidir.
- Parametrelerin duyarlılığına odaklanılır. İstatistiksel veri analiz yöntemlerini kullanır.
- Optimizasyon algoritmaları bir öğrenme setindeki kaybı en aza indirirken, görünmeyen numunelerdeki kayıpları en aza indirmekle ilgilidir.
- Duyarlılık analizinde belirli parametrelerdeki küçük değişikliklere karşı çıkış sinyallerin hassasiyetini belirlemek için kullanılır.
- Tasarım hedeflerinin karşılandığından emin olmak için bir tasarımı tolere edebilir.
- Duyarlılığı belirlemek ve bunu gürültüden ve parametre değerlerindeki büyük ölçekli varyasyonlardan ayırmak için gereken parametre varyasyonlarının dikkatli seçimi yapılır.

Haberleşme Sistemleri

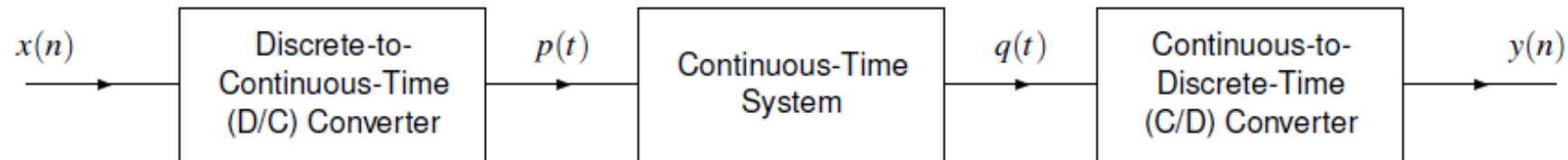


General Structure of a Communication System

Sinyal İşleme Sistemleri



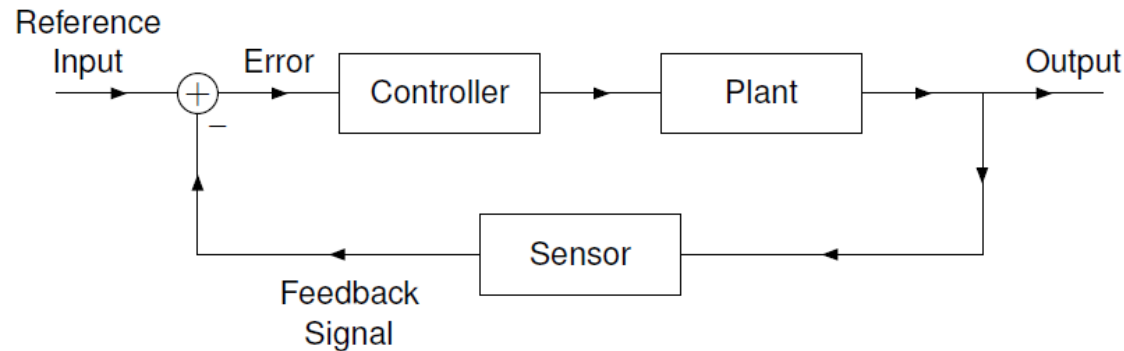
Processing a Continuous-Time Signal With a Discrete-Time System



Processing a Discrete-Time Signal With a Continuous-Time System

Feedback Control Systems

- Sistemlerin akıllandırılmasında kullanılır.
- Input: Giriş sinyali
- Output: Çıkış sinyali
- Hata: İstenen yani beklenen çıkış sinyali ile bulunan çıkış sinyali değerleri arasındaki fark
- Sistem giriş sinyalini çıkış sinyaline dönüştüren matematiksel ya da fiziksel sistem
- Sensör: Fiziksel değişimleri elektrik sinyali dönüştüren cihazlar
- Denetleyici: Hata bulan ve hatayı minimize etmek amacıyla parametreleri iyileştirme işlemi (Optimizasyon)
- Kararlılık özelliği, sistemin tüm giriş değerlerinden sonlu çıkış elde etme işlemidir. Eğer sonsuz çıkış değer elde edilirse sistem kararsız denir. Bu nedenle, Laplace alanı, sistemlerin kararlılık analizi için son derece yararlıdır.





Sinyallerin Matematiksel İfadesi

Basic Operations on Signal

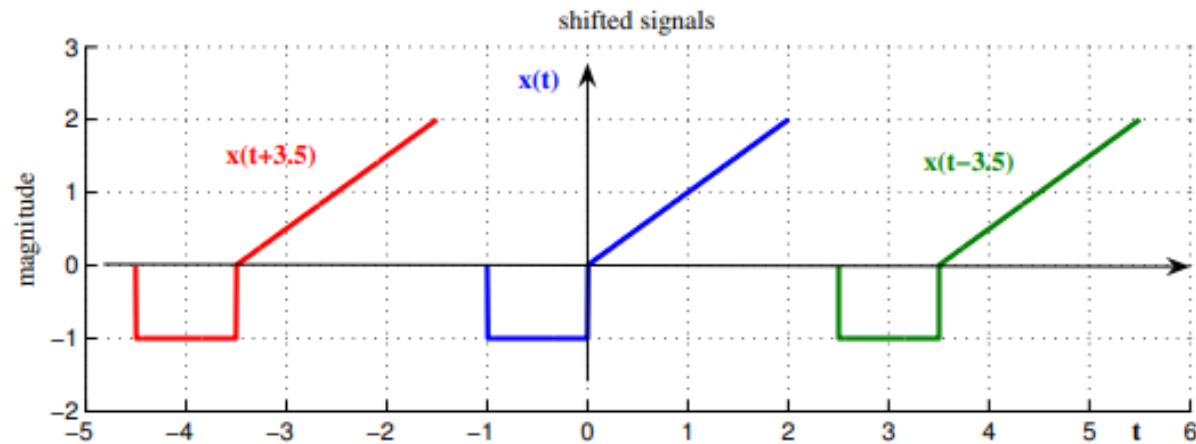
Operation	CT	DT	Note
Amplitude scaling	$y(t) = cx(t)$	$y[n] = cx[n]$	$c > 1$: gain $c < 1$: atten
Addition	$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$	$y[n] = x_1[n] + x_2[n]$	
Multiplication	$y(t) = x_1(t)x_2(t)$	$y[n] = x_1[n]x_2[n]$	
Differentiation	$y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$	(NO DT case)	
Integration	$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	(NO DT case)	
Time scaling	$y(t) = x(at)$ $\begin{cases} a > 1 : & \text{compression} \\ a < 1 : & \text{expansion} \end{cases}$	$y[n] = x[kn]$ $k > 0$ and integer only	
Reflection (time reversal)	$y(t) = x(-t)$	$y[n] = x[-n]$	
Time shifting	$y(t) = x(t - t_0)$ $\begin{cases} t_0 > 0 : & \text{right shift} \\ t_0 < 0 : & \text{left shift} \end{cases}$	$y[n] = x[n - n_0]$ $\begin{cases} n_0 > 0 : & \text{right shift} \\ n_0 < 0 : & \text{left shift} \end{cases}$	
Combination	$y(t) = x(at - t_0)$	$y[n] = x[kn - n_0]$	

CT: Zamanda Sürekli sinyal, DT: Zamanda ayırık sinyal

Örnek: Öteleme

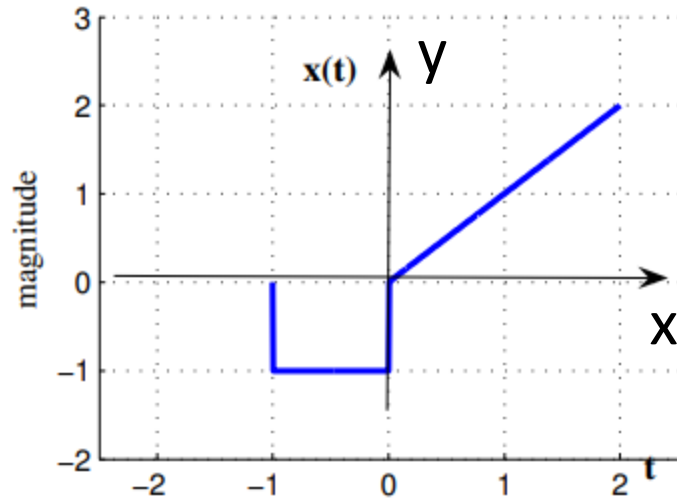
$$y(t) = x(t - 3.5) \quad (\text{shifted to the right by } 3.5)$$

$$y(t) = x(t + 3.5) \quad (\text{shifted to the left by } 3.5).$$

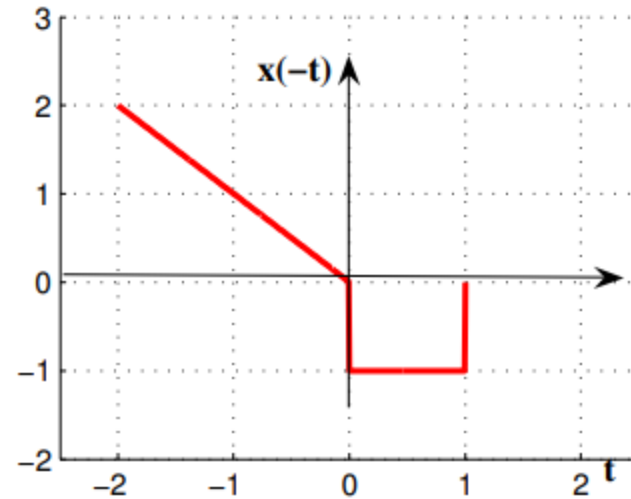


Signal $x(t)$ and its time-shift transforms by ± 3.5 .

Örnek: y -eksenine göre tersini alma

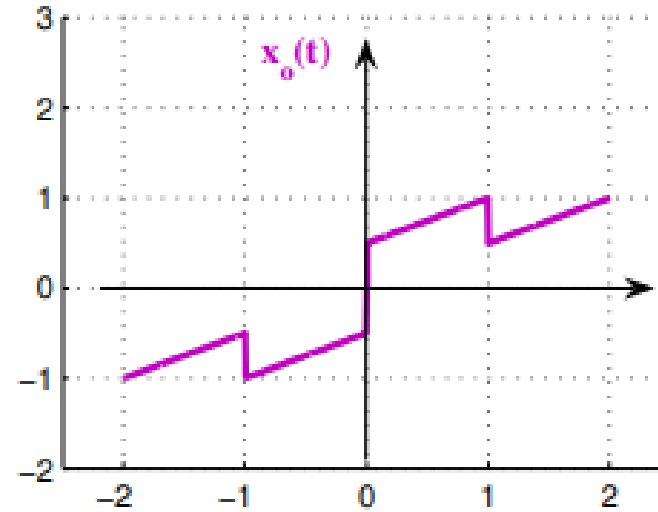
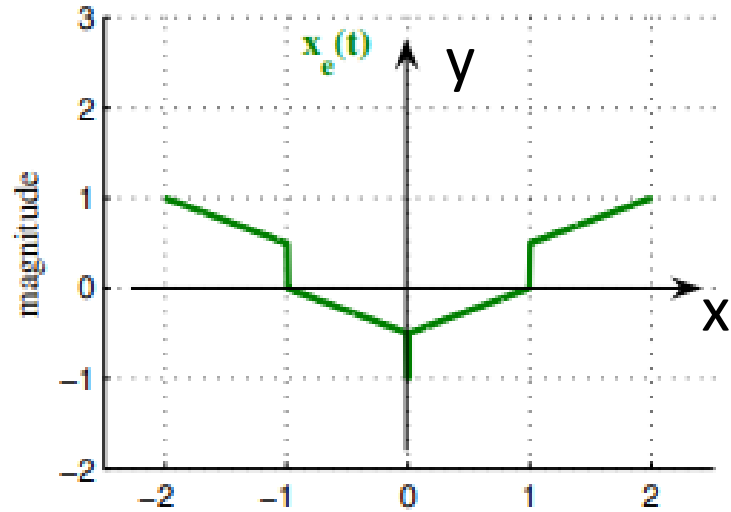


(a)

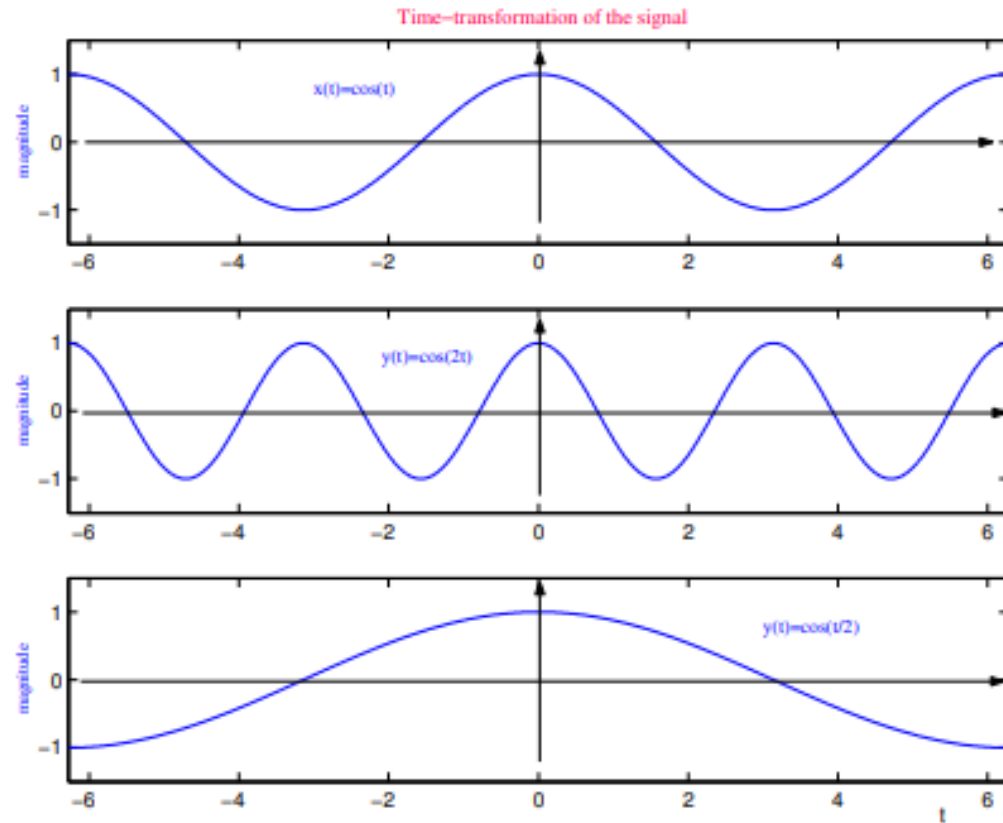


(b)

Örnek: x eksenine göre tersini alma



Cosine signal $x(t) = \cos(t)$ and time-scaled versions $y(t) = \cos(2t)$ and $y(t) = \cos(t/2)$.



$$T = 1/f$$

T: Peryod (Saniye), f: frekans (Hz=1/saniye)

Cosine signal $x(t) = \cos(t)$ and time-scaled versions $y(t) = \cos(2t)$ and $y(t) = \cos(t/2)$.

Örnek

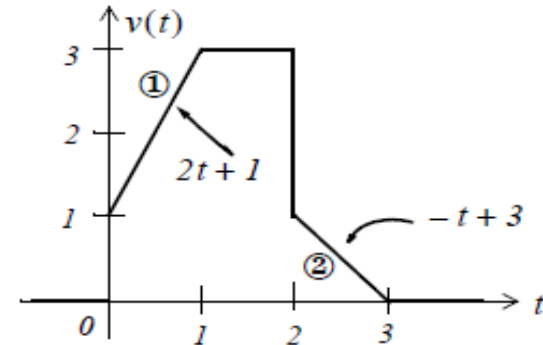


Figure 1.15. Equations for the linear segments of Figure 1.14

Following the same procedure as in the previous examples, we get

$$v(t) = (2t + 1)[u_0(t) - u_0(t - 1)] + 3[u_0(t - 1) - u_0(t - 2)] \\ + (-t + 3)[u_0(t - 2) - u_0(t - 3)]$$

Multiplying the values in parentheses by the values in the brackets, we get

$$v(t) = (2t + 1)u_0(t) - (2t + 1)u_0(t - 1) + 3u_0(t - 1) \\ - 3u_0(t - 2) + (-t + 3)u_0(t - 2) - (-t + 3)u_0(t - 3)$$

or

$$v(t) = (2t + 1)u_0(t) + [-(2t + 1) + 3]u_0(t - 1) \\ + [-3 + (-t + 3)]u_0(t - 2) - (-t + 3)u_0(t - 3)$$

and combining terms inside the brackets, we get

$$v(t) = (2t + 1)u_0(t) - 2(t - 1)u_0(t - 1) - tu_0(t - 2) + (t - 3)u_0(t - 3)$$

Örnek

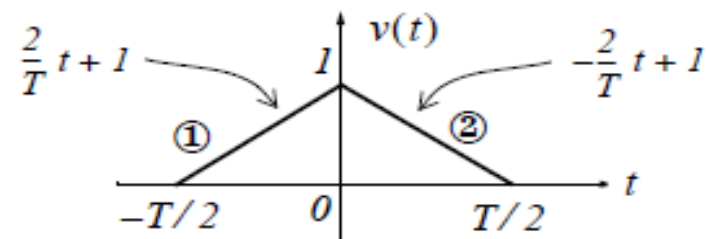


Figure 1.13. Equations for the linear segments of Figure 1.12

For line segment ①,

$$v_1(t) = \left(\frac{2}{T}t + 1\right) \left[u_0\left(t + \frac{T}{2}\right) - u_0(t) \right]$$

and for line segment ②,

$$v_2(t) = \left(-\frac{2}{T}t + 1\right) \left[u_0(t) - u_0\left(t - \frac{T}{2}\right) \right]$$

Combining (1.15) and (1.16), we get

$$\begin{aligned} v(t) &= v_1(t) + v_2(t) \\ &= \left(\frac{2}{T}t + 1\right) \left[u_0\left(t + \frac{T}{2}\right) - u_0(t) \right] + \left(-\frac{2}{T}t + 1\right) \left[u_0(t) - u_0\left(t - \frac{T}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

Örnek

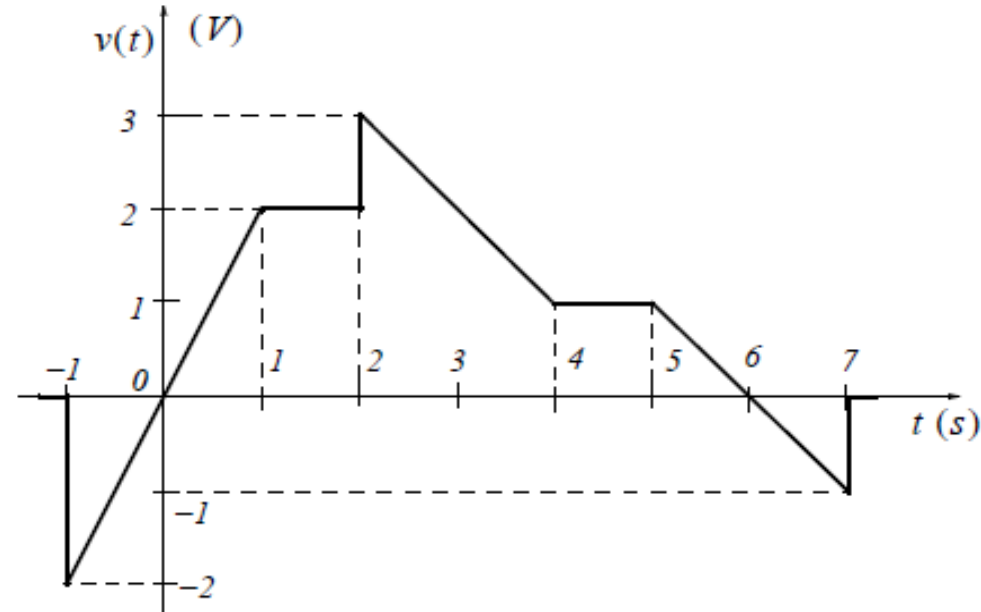


Figure 1.21. Waveform for Example 1.9

Solution:

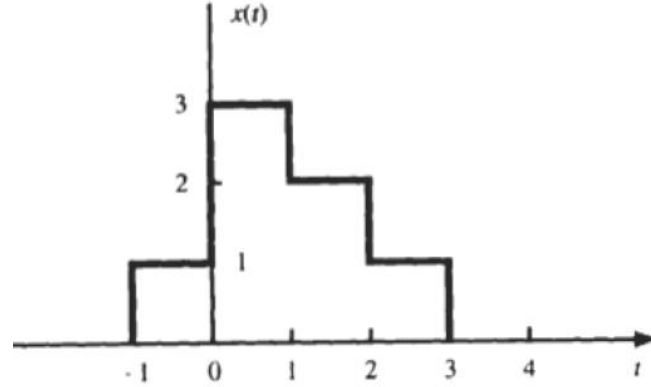
- a. We first derive the equations for the linear segments of the given waveform. These are shown in Figure 1.22.

Next, we express $v(t)$ in terms of the unit step function $u_0(t)$, and we get

$$\begin{aligned} v(t) = & 2t[u_0(t+1) - u_0(t-1)] + 2[u_0(t-1) - u_0(t-2)] \\ & + (-t+5)[u_0(t-2) - u_0(t-4)] + [u_0(t-4) - u_0(t-5)] \\ & + (-t+6)[u_0(t-5) - u_0(t-7)] \end{aligned} \quad (1.52)$$

Örnek:

Soru: Şekil'de gösterilen sinyalleri birim adım fonksiyonları açısından ifade edin.



$$x(t) = u(t+1) + 2u(t) - u(t-1) - u(t-2) - u(t-3)$$

$$x(t) = [u(t+1) - u(t)] + 3[u(t) - u(t-1)] + 2[u(t-1) - u(t-2)] + [u(t-2) - u(t-3)]$$

$$x(t) = u(t+1) - u(t) + 3u(t) - 3u(t-1) + 2u(t-1) - 2u(t-2) + u(t-2) - u(t-3)$$

$$x(t) = u(t+1) + 2u(t) - u(t-1) - u(t-2) - u(t-3)$$

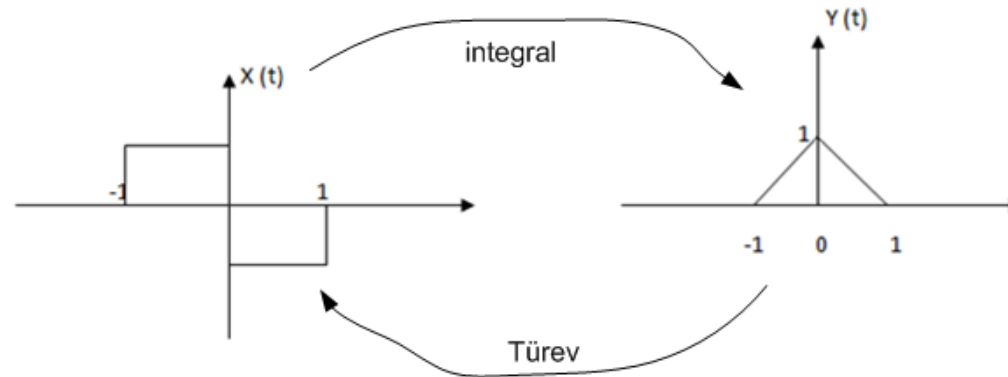
The given pair $x(t)$ and $y(t)$ is related by _____

a) $Y(t) = d/dt (x(t))$

b) $Y(t) = x(t) + 1$

c) $Y(t) = \int x(t) .dt$

d) Not related



View Answer, Answer: c

Explanation: The given pair $x(t)$ and $y(t)$ is related by $Y(t) = \int x(t) .dt$. The integral of $x(t)$ gives the $Y(t)$. $Y(t) = 0$ for $t > 1$.

$x(t)$ ve $y(t)$ sinyallerinin birbirleri ile ilişkisi nedir?

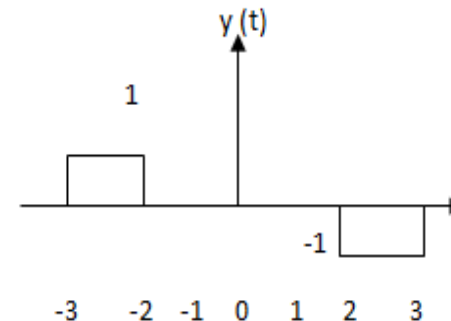
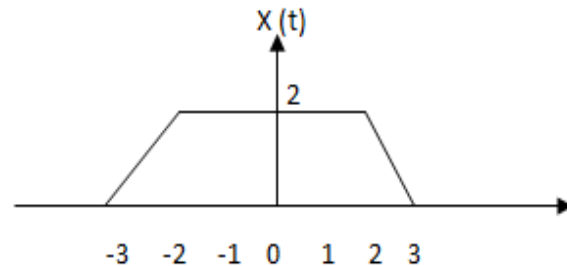
($F_1(t)=at+b$ ve $F_2(t)=c$ ifadelerini göz önüne alınız)

Her iki sinyalin matematiksel ifadesini bulunuz.

İki sinyalin birbiri ile ilişkisi ne olabilir. (Türev, integral, toplama, çarpma, bölme, çıkarma...)

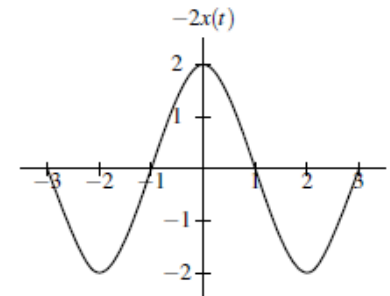
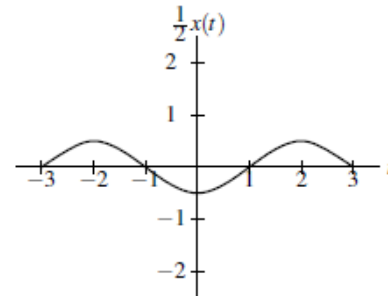
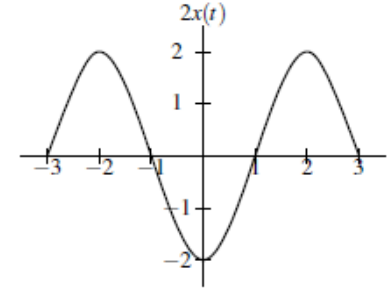
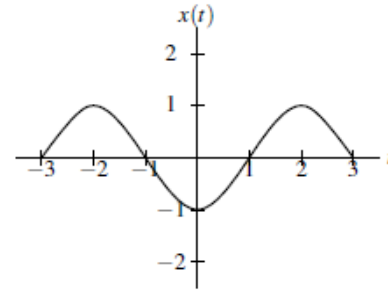
$$Y(t) = d/dt (x(t))$$

Explanation: The given pair $x(t)$ and $y(t)$ is related by $y(t) = d/dt (x(t))$. From -2 to 2 we have $Y(t)$ is zero because differentiation of constant is zero.



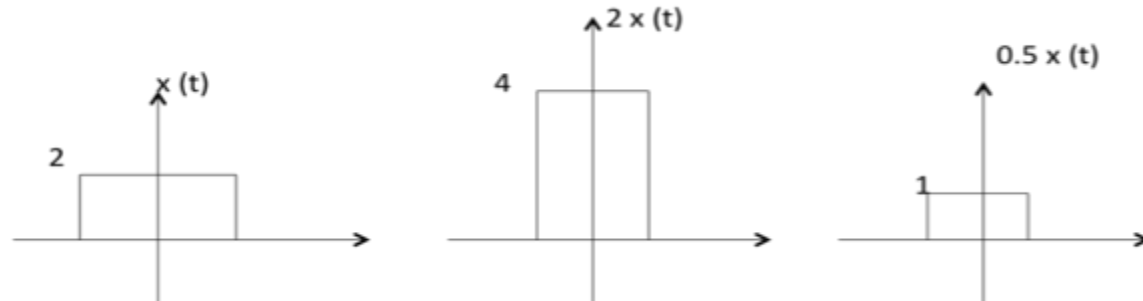
Genlik Ölçeklendirme

- Genlik ölçeklendirme, a 'nın gerçek bir sayı olduğu $y(t) = ax(t)$ ile verildiği gibi, giriş sinyali x 'i çıkış sinyali y 'ye eşler.
- Geometrik olarak, çıktı sinyali y genlik olarak genişletilir ya da sıkıştırılır ve/veya yatay eksen etrafında yansıtılır.



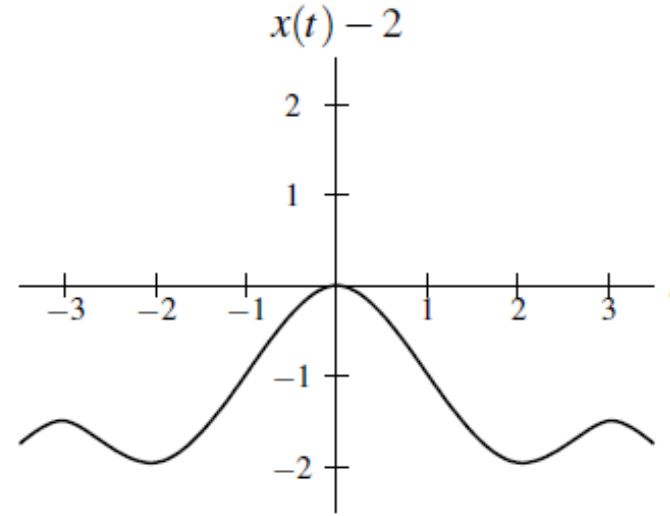
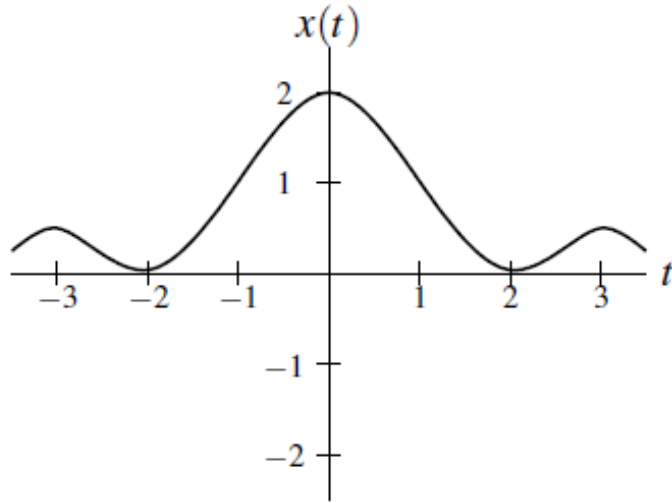
Amplitude Scaling

$C x(t)$ is an amplitude scaled version of $x(t)$ whose amplitude is scaled by a factor C .



Genlik Deęiřimi

- Genlik kayması, $y(t) = x(t) + b$ ile verildiği gibi giriş sinyalinin x çıkış sinyaline y eşler, burada b bir gerçek sayıdır.
- Geometrik olarak, genlik kaydırma, x 'e dikey bir yer deęiřtirme ekler.



Genlik Ölçeklendirme ve Genlik Kaydırma Birleştirilmesi

- Genlik ölçeklendirme ve genlik kaydırma dönüşümlerini de birleştirebiliriz.
- a ve b 'nin gerçak sayılar olduğu, $y(t) = ax(t) + b$ ile verildiği gibi, x giriş sinyalinin y çıkış sinyaline eşleyen bir dönüşümü düşünün.
- Eşdeğer olarak, yukarıdaki dönüşüm $y(t) = a[x(t) + b/a]$ olarak ifade edilebilir.
- Yukarıdaki dönüşüm şuna eşdeğerdir:
 - ilk olarak x 'i a ile ölçeklendiren genlik ve sonra ortaya çıkan sinyali b ile kaydıran genlik; veya
 - ilk genlik x 'i b/a ile kaydırır ve sonra ortaya çıkan sinyali a ile ölçeklendirir.

Addition

Addition of two signals is nothing but addition of their corresponding amplitudes. This can be best explained by using the following example:

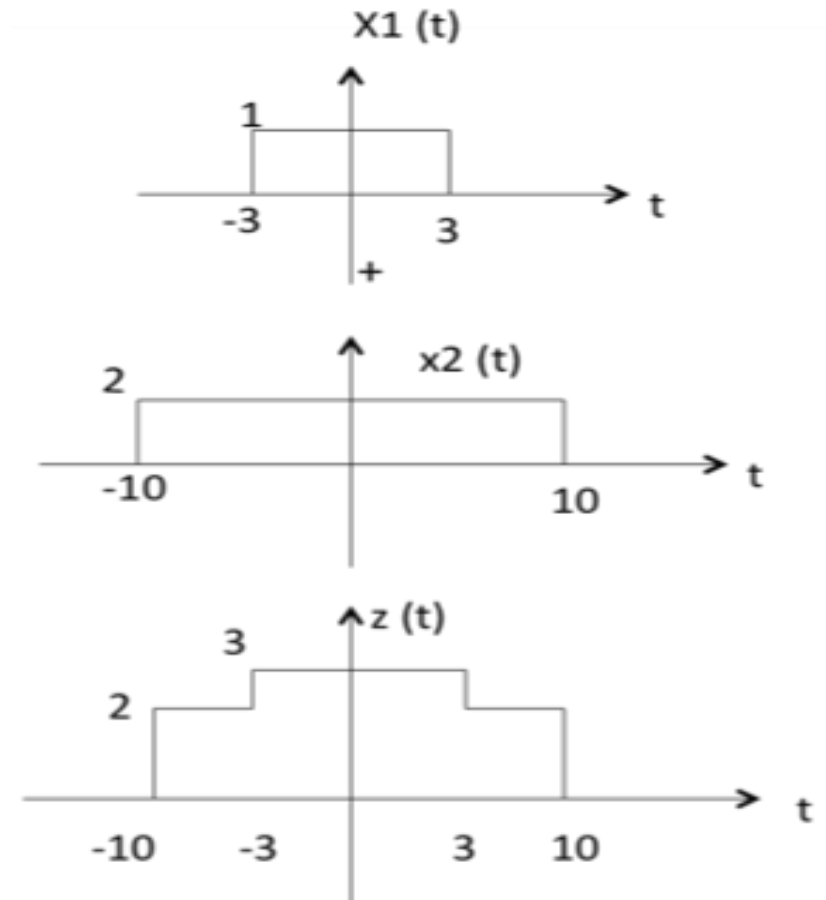
$$z(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

As seen from the diagram above,

$$-10 < t < -3 \text{ amplitude of } z(t) = x_1(t) + x_2(t) = 0 + 2 = 2$$

$$-3 < t < 3 \text{ amplitude of } z(t) = x_1(t) + x_2(t) = 1 + 2 = 3$$

$$3 < t < 10 \text{ amplitude of } z(t) = x_1(t) + x_2(t) = 0 + 2 = 2$$



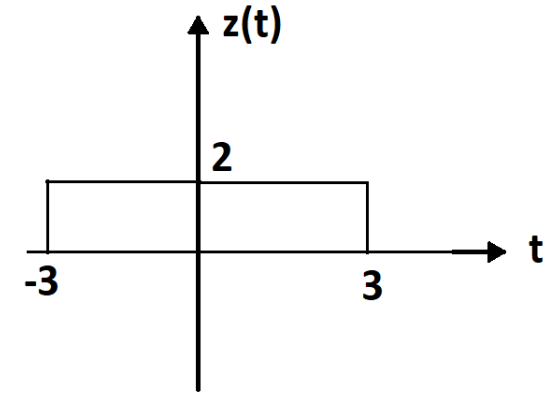
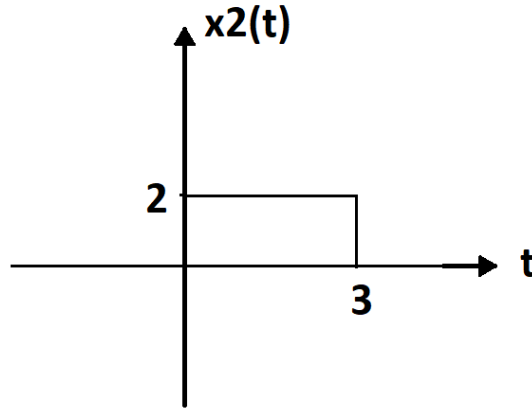
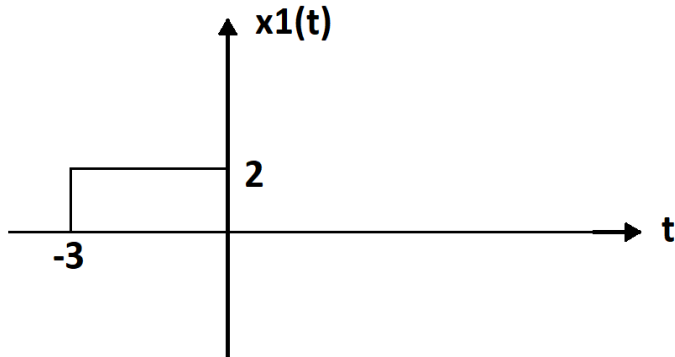
Örnek

İki sinyalin eklenmesi, karşılık gelen genliklerin eklenmesinden başka bir şey değildir. $X_1(t)$ 'yi çizdiriniz, $X_2(t)$ 'yi çizdiriniz. O halde $z(t)=x_1(t) + x_2(t)=?$ bulunuz. $Z(t)$ 'yi çizdiriniz.

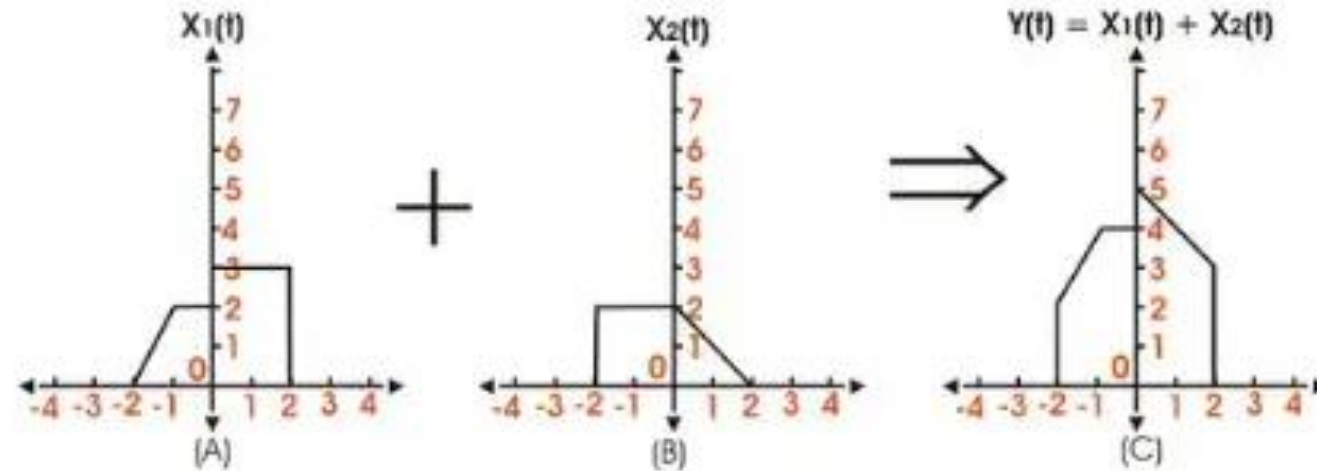
$$X_1(t) = 0, t \leq -3; X_1(t) = 0, t \geq 0; X_1(t) = 2, -3 < t < 0$$

$$X_2(t) = 0, t \leq 0; X_2(t) = 0, t \geq 3; X_2(t) = 2, 0 < t < 3$$

$$Z(t) = 0, t \leq -3; Z(t) = 0, t \geq +3; Z(t) = 2, -3 < t < 3$$



Addition



Subtraction

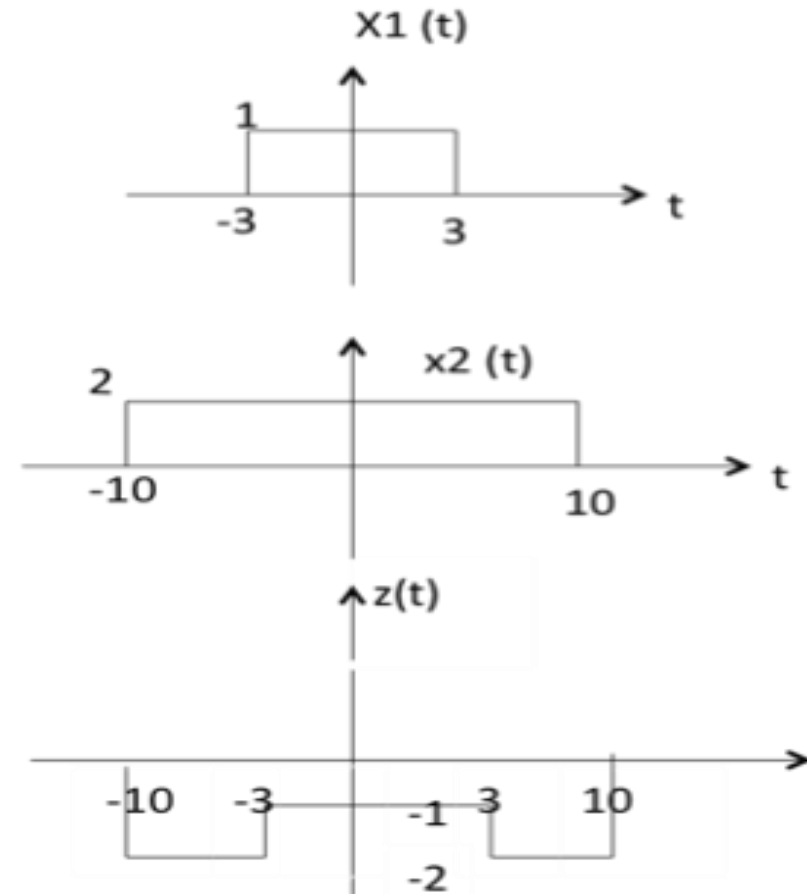
subtraction of two signals is nothing but subtraction of their corresponding amplitudes. This can be best explained by the following example:

As seen from the diagram above,

$-10 < t < -3$ amplitude of $z(t) = x_1(t) - x_2(t) = 0 - 2 = -2$

$-3 < t < 3$ amplitude of $z(t) = x_1(t) - x_2(t) = 1 - 2 = -1$

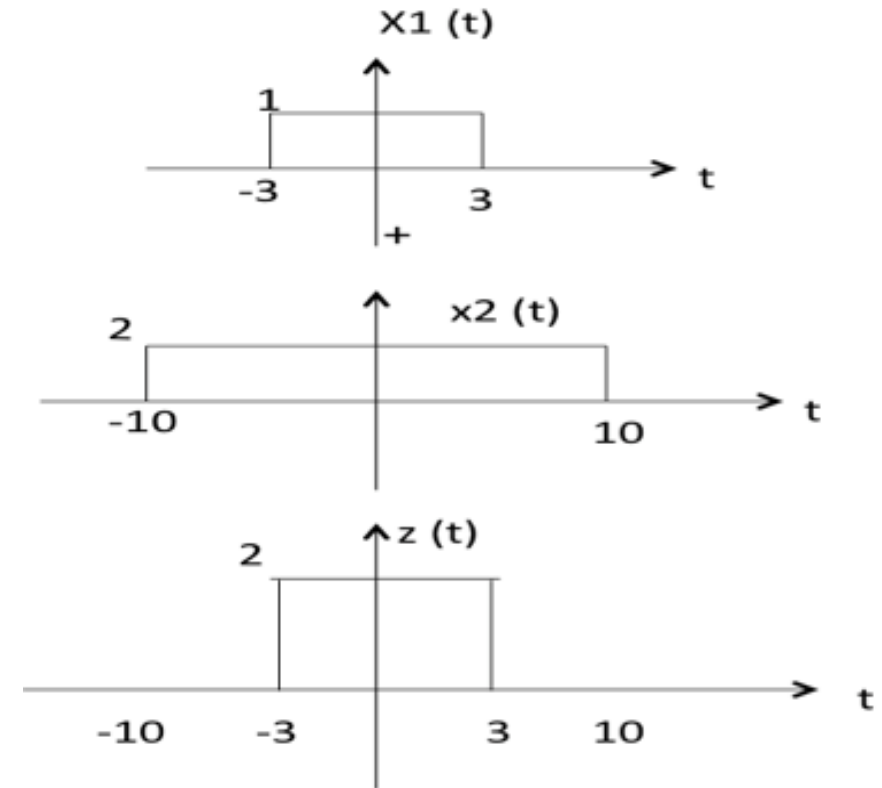
$3 < t < 10$ amplitude of $z(t) = x_1(t) - x_2(t) = 0 - 2 = -2$



Multiplication

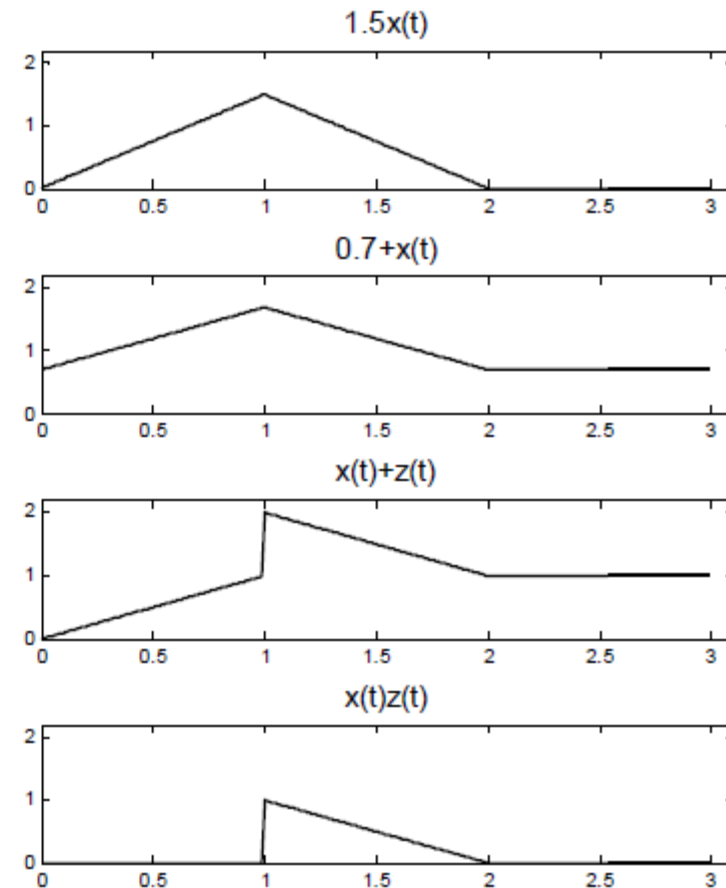
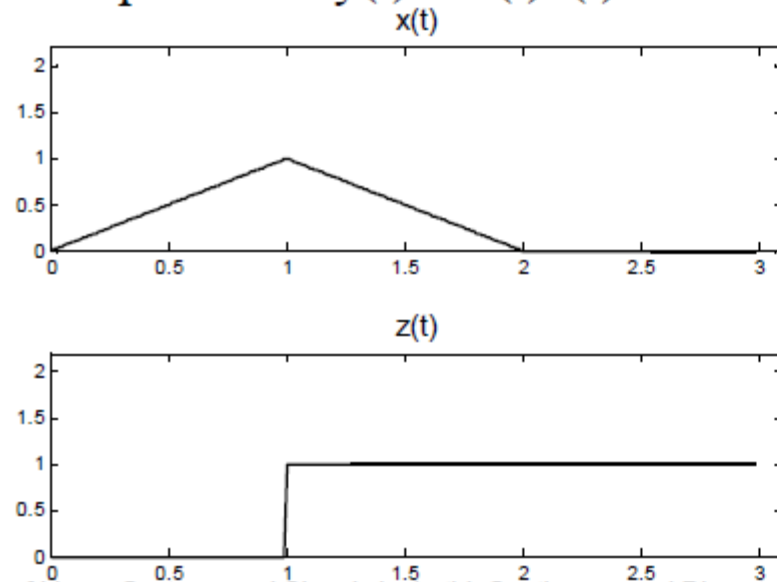
Multiplication of two signals is nothing but multiplication of their corresponding amplitudes. This can be best explained by the following example:

As seen from the diagram above,
-10 < t < -3 amplitude of z (t) = x1(t) × x2(t) = 0 × 2 = 0
-3 < t < 3 amplitude of z (t) = x1(t) × x2(t) = 1 × 2 = 2
3 < t < 10 amplitude of z (t) = x1(t) × x2(t) = 0 × 2 = 0



Elementary Operations on Signals

- Amplitude Scale: $y(t) = ax(t)$, where a is a real (or possibly complex) constant.
- Amplitude Shift: $y(t) = x(t) + b$, where b is a real (or possibly complex) constant
- Addition: $y(t) = x(t) + z(t)$
- Multiplication: $y(t) = x(t)z(t)$



Consider a CT signal $x(t)$ defined as follows:

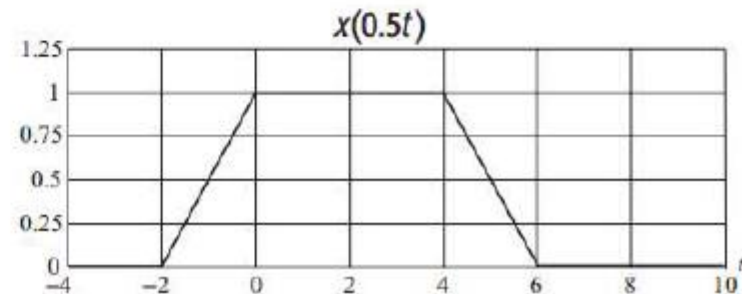
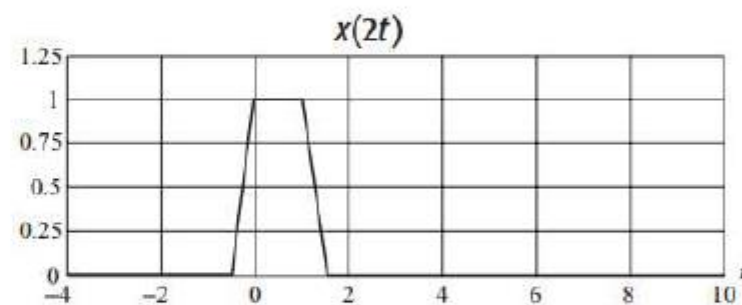
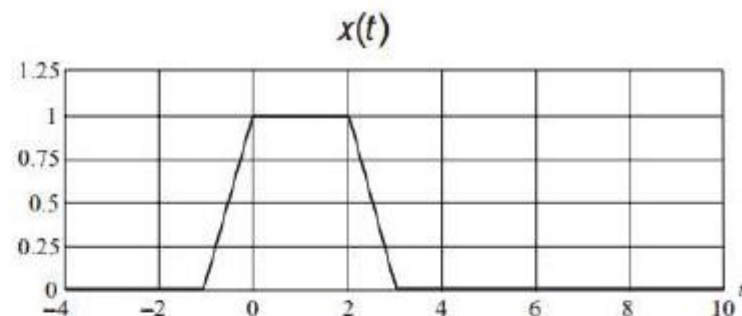
$$x(t) = \begin{cases} t+1 & -1 \leq t \leq 0 \\ 1 & 0 \leq t \leq 2 \\ -t+3 & 2 \leq t \leq 3 \\ 0 & \text{elsewhere,} \end{cases} \quad (1.53)$$

as plotted in Fig. 1.25(a). Determine the expressions for the time-scaled signals $x(2t)$ and $x(t/2)$. Sketch the two signals.

Solution

$$x(2t) = \begin{cases} 2t+1 & -0.5 \leq t \leq 0 \\ 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ -2t+3 & 1 \leq t \leq 1.5 \\ 0 & \text{elsewhere,} \end{cases}$$

$$x(t/2) = \begin{cases} t/2+1 & -2 \leq t \leq 0 \\ 1 & 0 \leq t \leq 4 \\ -t/2+3 & 4 \leq t \leq 6 \\ 0 & \text{elsewhere,} \end{cases}$$



Example

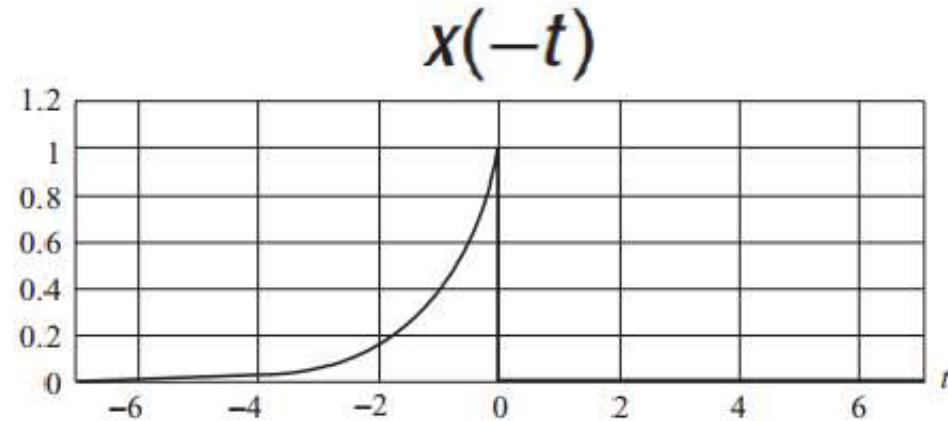
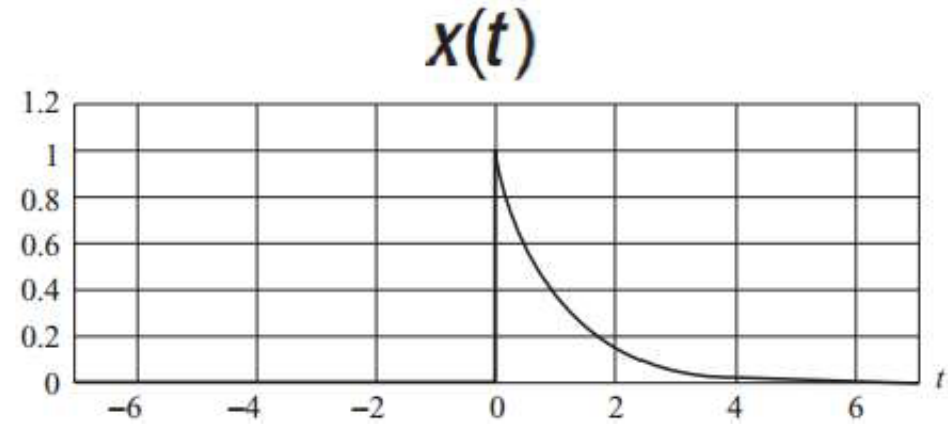
Sketch the time-inverted version of the causal decaying exponential signal

$$x(t) = e^{-t}u(t) = \begin{cases} e^{-t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{elsewhere,} \end{cases} \quad (1.56)$$

which is plotted in Fig. 1.28(a).

Solution

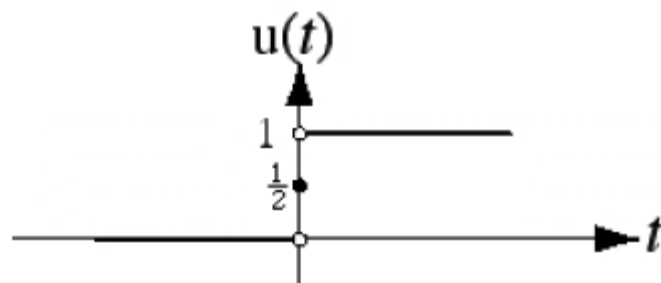
$$x(-t) = \begin{cases} e^t & t \leq 0 \\ 0 & \text{elsewhere.} \end{cases}$$



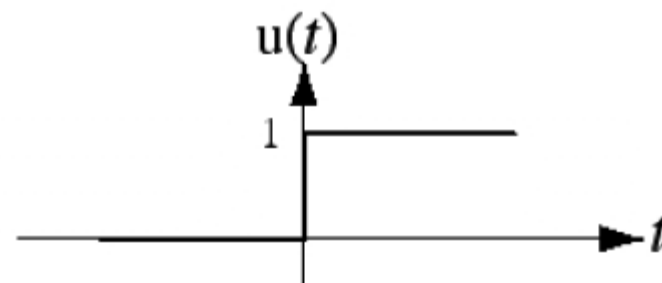
The CT Unit Step Function

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Precise Graph



Commonly-Used Graph

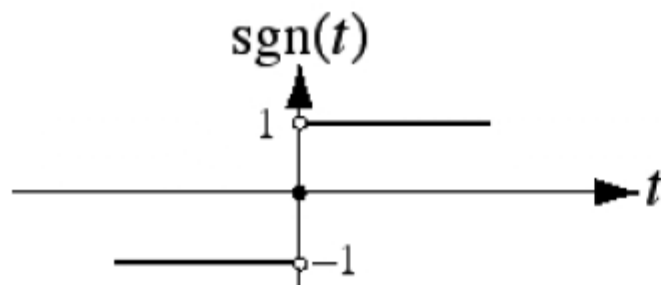


The product signal, $g(t)u(t)$, can be thought of as the signal, $g(t)$, “turned on” at time, $t = 0$.

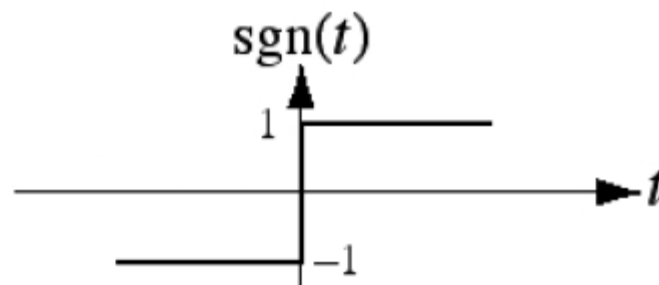
The CT Signum Function

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & , t > 0 \\ 0 & , t = 0 \\ -1 & , t < 0 \end{cases} = 2u(t) - 1$$

Precise Graph



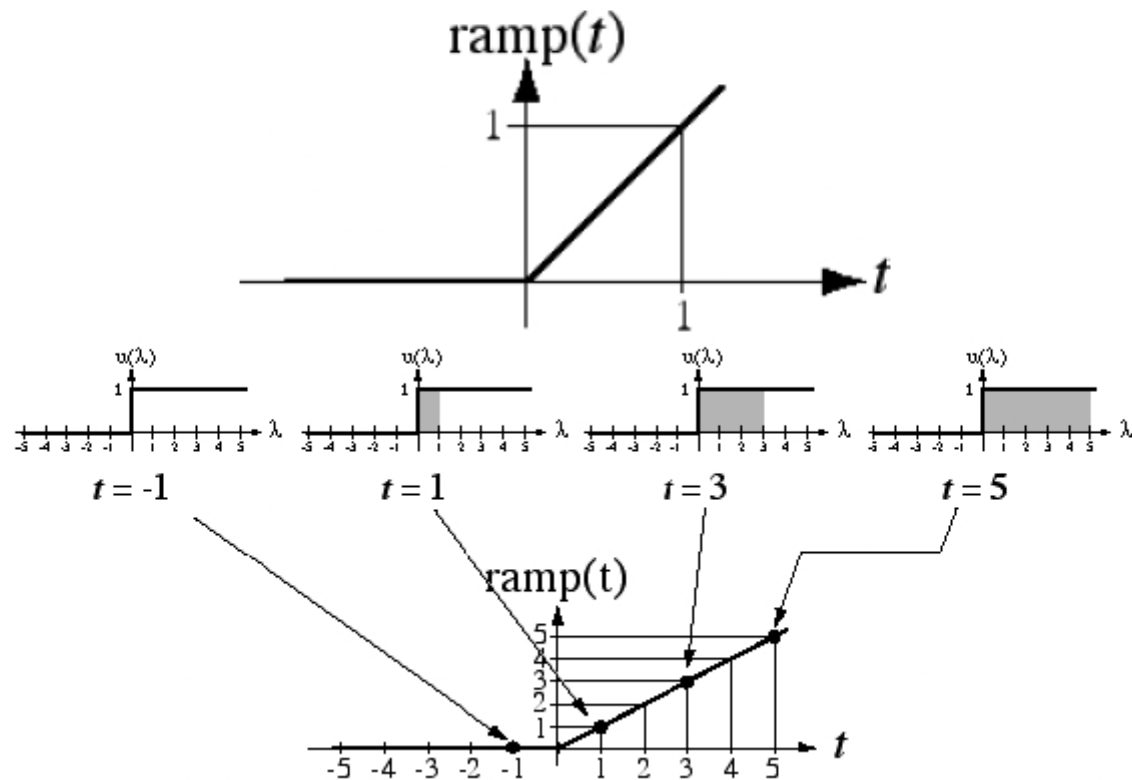
Commonly-Used Graph



The signum function, in a sense, returns an indication of the sign of its argument.

The CT Unit Ramp Function

$$\text{ramp}(t) = \begin{cases} t & , t > 0 \\ 0 & , t \leq 0 \end{cases} = \int_{-\infty}^t u(\lambda) d\lambda = t u(t)$$



Representation of Discrete Signal

$$x(n) = \begin{cases} 1, & \text{for } n = 1, 3 \\ 4, & \text{for } n = 2 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

n	...	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
$x(n)$...	0	0	0	1	4	1	0	0	...

Functional representation

Tabular representation

$$x(n) = \{ \dots, 0, \mathbf{0}, 1, 4, 1, 0, 0, \dots \}$$

infinite – duration signal

$$x(n) = \{ \mathbf{0}, -2, 1, 4, -1, \}$$

finite – duration signal

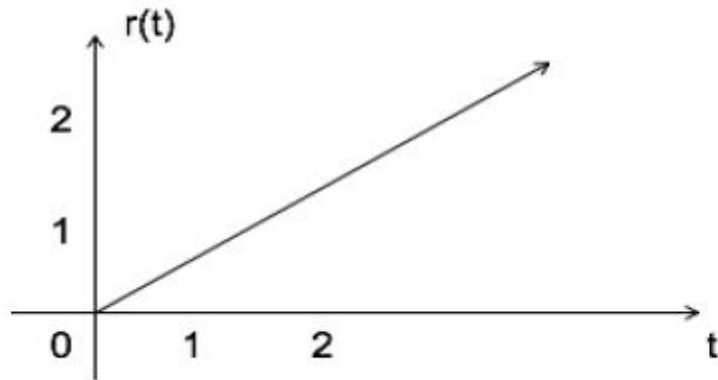
Filter

Örnek: Filter

- Frekans domeniinde indislenmiş ayrık sinyal değerleri, $n=1,2, \dots, 10$ aşağıda verilmiştir.
- $X[n]=[7, 2, 1, 2,2,2,2, 10, 4, 7]$
- $Y[n]=[0, 0, 0, 2,2,2,2, 0, 0, 0]$
- $X[n]$ girişi $Y[n]$ filtre girişi ile çarpıldığında çıkış $Z[n]$ ne olur?

Ramp Signal

Ramp signal is denoted by $r(t)$, and it is defined as $r(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$



$$\int u(t) = \int 1 = t = r(t)$$

$$u(t) = \frac{dr(t)}{dt}$$

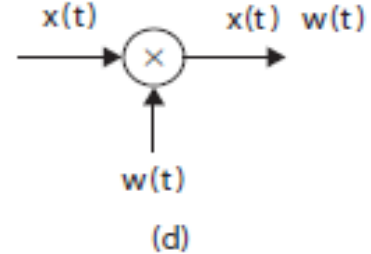
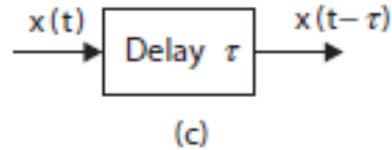
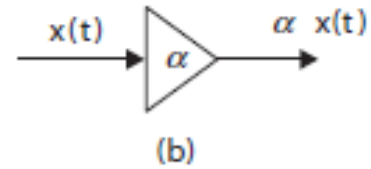
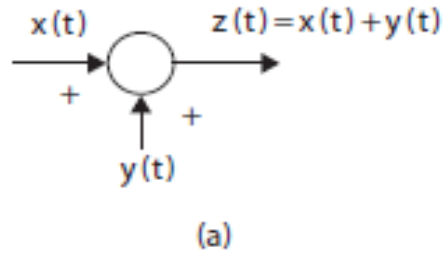


Sistemlerin Blok Diyagram Gösterimi

Sistemlerin Matematiksel Model Gösterimi

Karmaşık sistemler oluşturmak için birbirine bağlanabilen bazı temel yapı taşlarının tanımlanması gerekir.

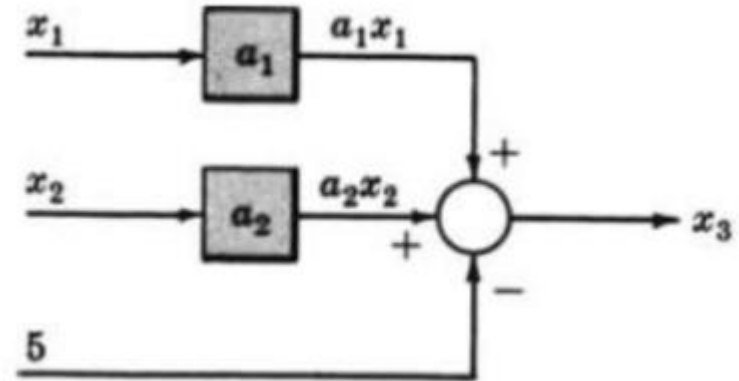
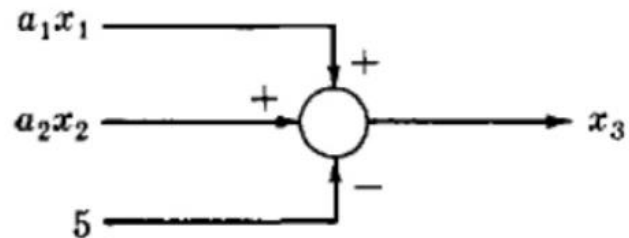
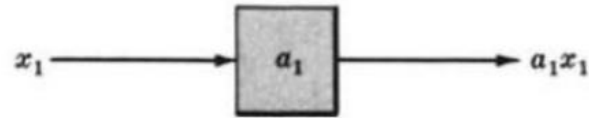
Diagrams of basic signal operations: (a) adder, (b) constant multiplier, (c) delay, and (d) time windowing or modulation.



Example-1

Consider the following equations in which x_1 , x_2 , x_3 , are variables, and a_1 , a_2 are general coefficients or mathematical operators.

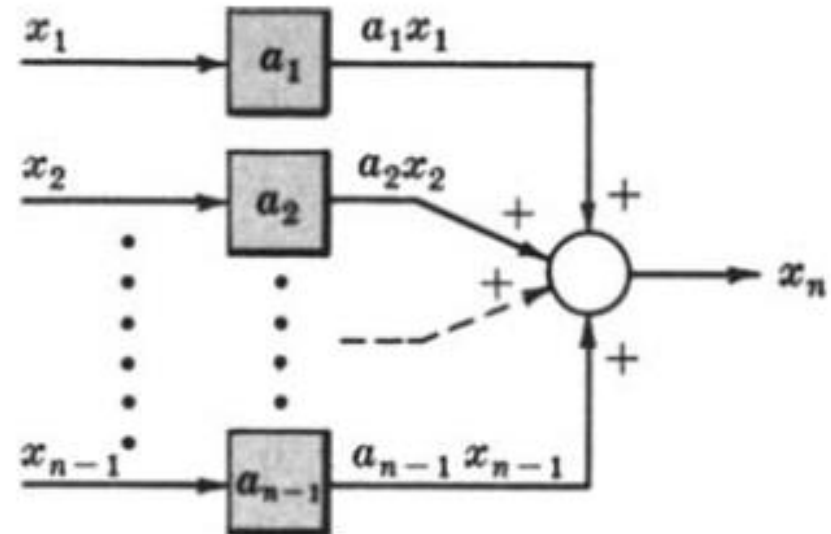
$$x_3 = a_1x_1 + a_2x_2 - 5$$



Example

- Consider the following equations in which x_1, x_2, \dots, x_n , are variables, and a_1, a_2, \dots, a_n , are general coefficients or mathematical operators.

$$x_n = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_{n-1} x_{n-1}$$



Örnek

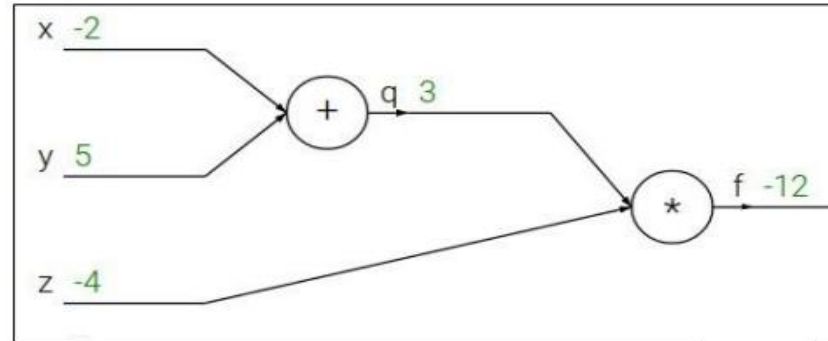
$$f(x, y, z) = (x + y)z$$

e.g. $x = -2, y = 5, z = -4$

$$q = x + y \quad \frac{\partial q}{\partial x} = 1, \frac{\partial q}{\partial y} = 1$$

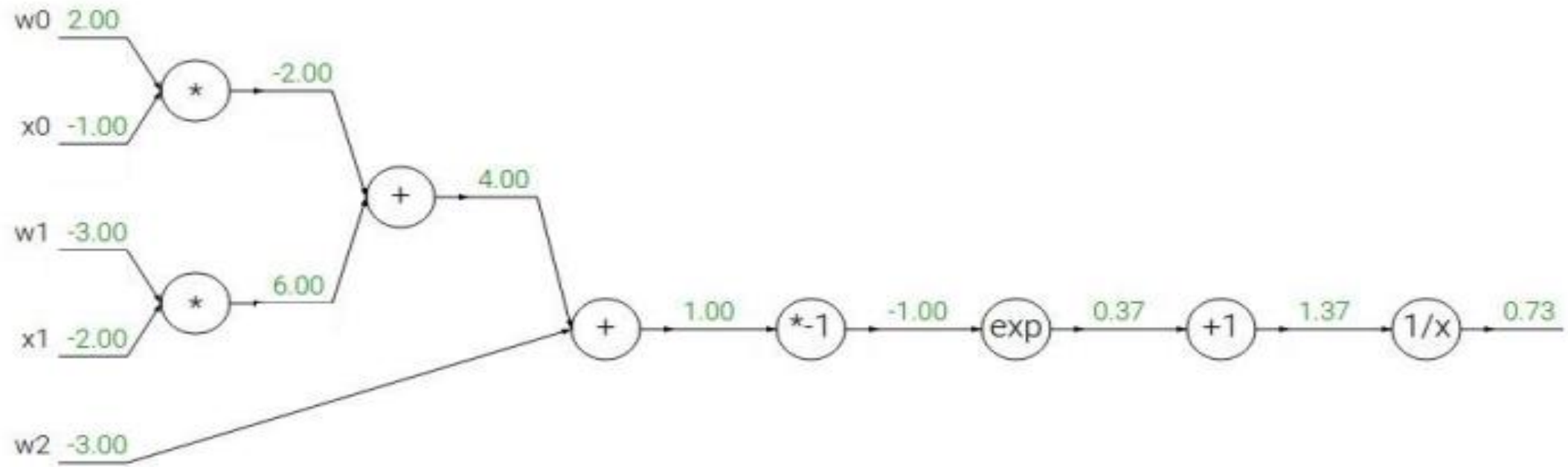
$$f = qz \quad \frac{\partial f}{\partial q} = z, \frac{\partial f}{\partial z} = q$$

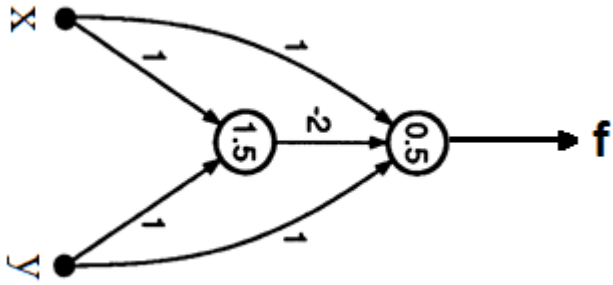
Want: $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$



Örnek

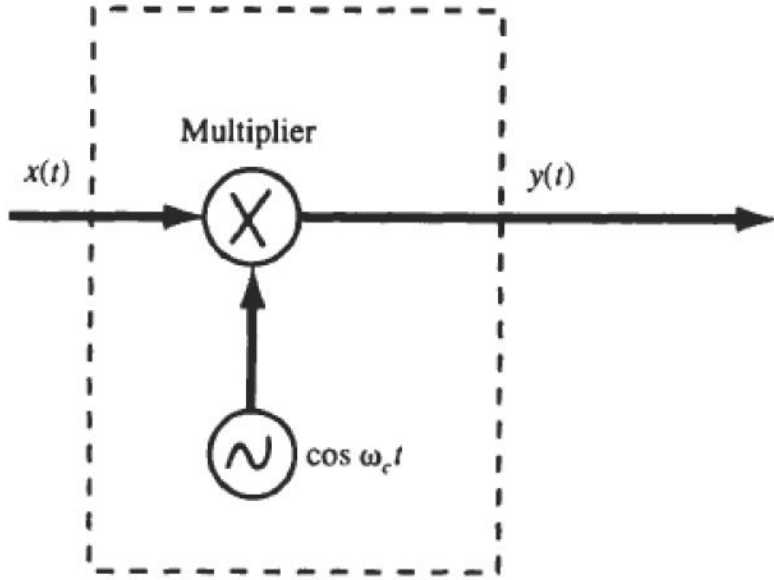
example: $f(w, x) = \frac{1}{1 + e^{-(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2)}}$





- Daire içindeki değerler belirleyici hiperparametredir. Toplanır.
- $f = -2(x + y + 1.5) + x + y + 0.5$

Uygulama-1



$$y(t) = x(t) \cos(\omega_c t)$$

- Sistem bellekli mi?
- Sistem nedensel mi?
- Sistem lineer mi?
- Zamanla değişir mi (time-invariant)?
- Kararlı mı?

- Sistem belleksiz. Çıkışın $y(t)$ değeri yalnızca $x(t)$ girişinin mevcut değerlerine bağlı olduğundan, sistem hafızasızdır.
- $t=5$, $y(5) = x(5) \cos(\omega_c t)$; Çıktı $y(t)$, $x(t)$ girdisinin gelecekteki değerlerine bağlı olmadığından, sistem nedenseldir.

- (d) Let $y_1(t)$ be the output produced by the shifted input $x_1(t) = x(t - t_0)$. Then

$$y_1(t) = T\{x(t - t_0)\} = x(t - t_0) \cos \omega_c t$$

But $y(t - t_0) = x(t - t_0) \cos \omega_c (t - t_0) \neq y_1(t)$. Hence, the system is **not time-invariant**.

- (e) Since $|\cos \omega_c t| \leq 1$, we have

$$|y(t)| = |x(t) \cos \omega_c t| \leq |x(t)|$$

Thus, if the input $x(t)$ is bounded, then the output $y(t)$ is also bounded and the system is **BIBO stable**.

- (c) Let $x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$. Then

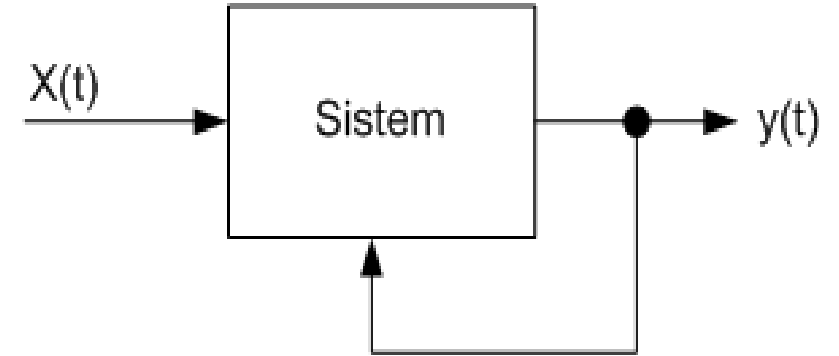
$$\begin{aligned} y(t) &= [\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)] \cos \omega_c t \\ &= \alpha_1 x_1(t) \cos \omega_c t + \alpha_2 x_2(t) \cos \omega_c t \\ &= \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) \end{aligned}$$

Thus, the system is **linear**.

Intelligent systems in systems as
feedback

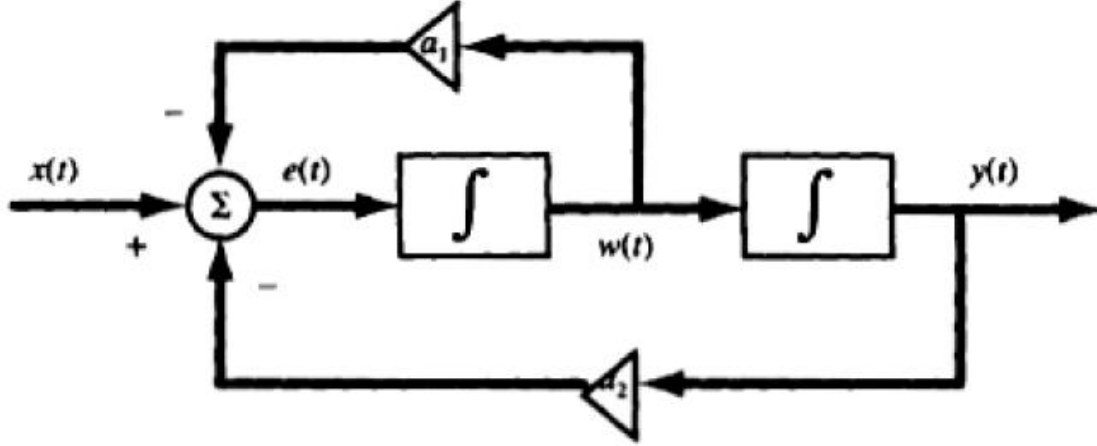
Intelligent systems in systems as feedback

- If the outputs of the systems become inputs as feedback, the systems start to become smarter.



Uygulama-2

Sürekli zaman sistemi, iki entegratörden ve iki skaler çarpandan oluşur. Çıktı $y(t)$ ve giriş $x(t)$ ile ilişkilendiren bir diferansiyel denklem yazın.



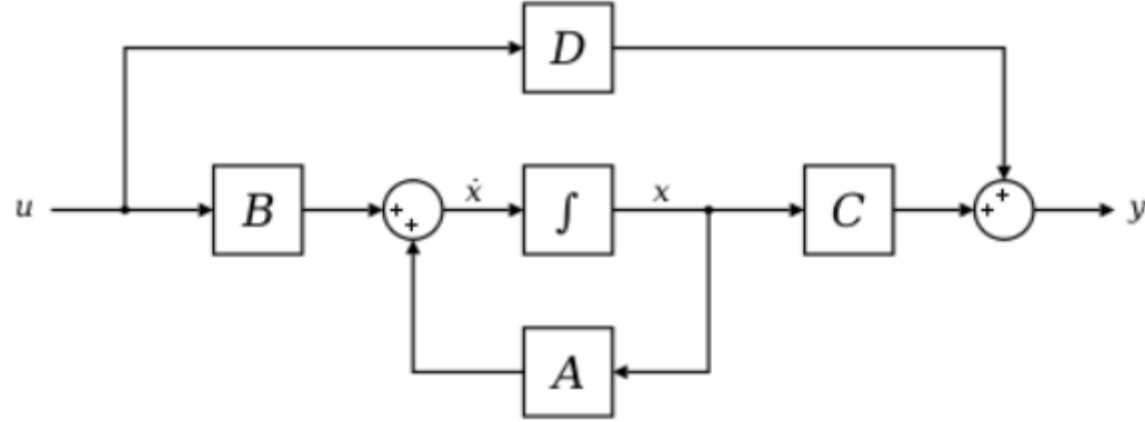
$$e(t) = \frac{dw(t)}{dt} = -a_1 w(t) - a_2 y(t) + x(t)$$

$$w(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -a_1 \frac{dy(t)}{dt} - a_2 y(t) + x(t)$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 y(t) = x(t)$$

Doğrusal durum uzayı denklemlerinin blok diyagram gösterimi

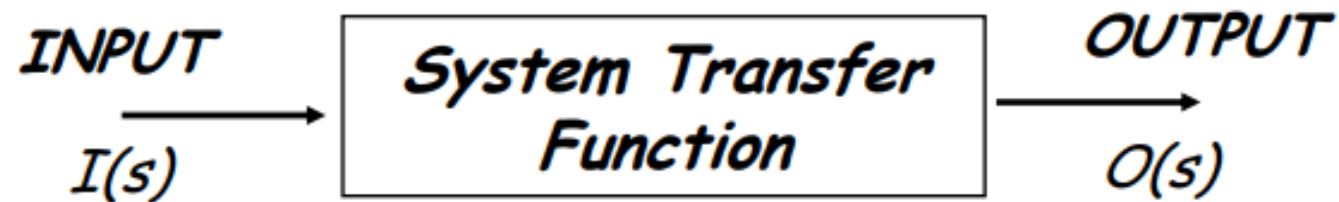
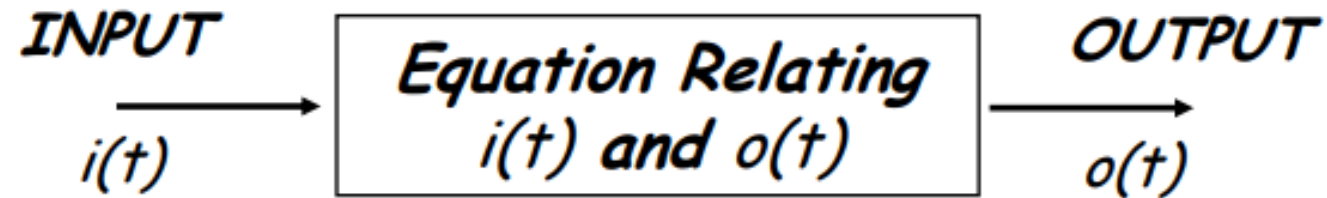


$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)$$

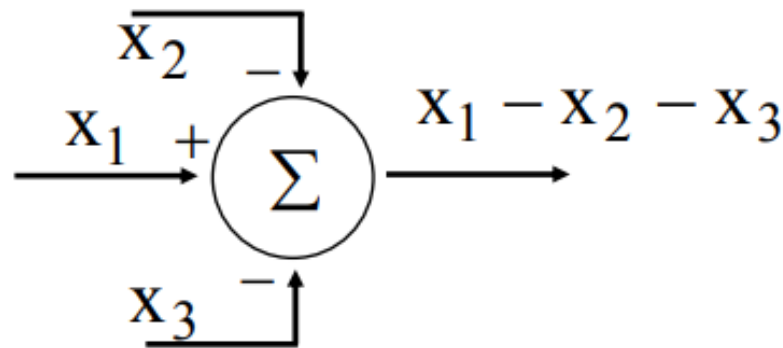
Block Diagram Representation

Representation of a system in terms of discrete blocks that represent part of a system.

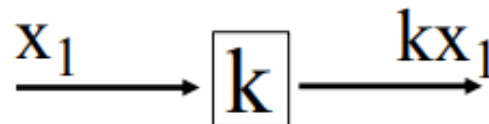


Block Diagram Representation

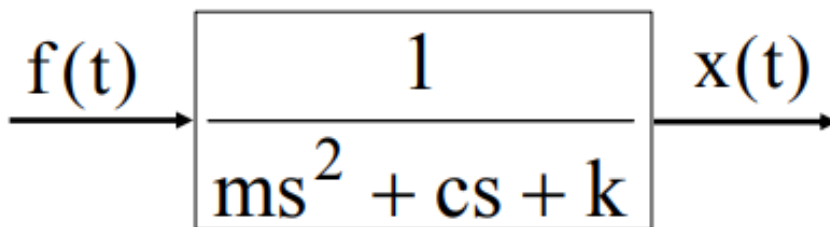
Summing Junction - Used to sum signals together



Constant Gain - Scalar multiplier



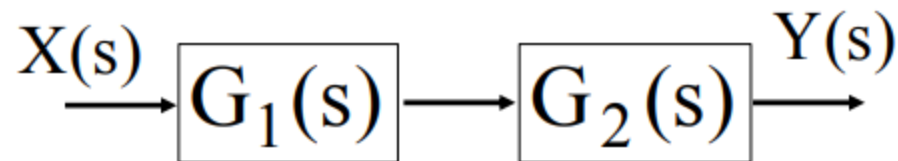
Transfer Function - Given a system with zero initial conditions, the transfer function is the ratio of output due to input



Block Diagram Representation

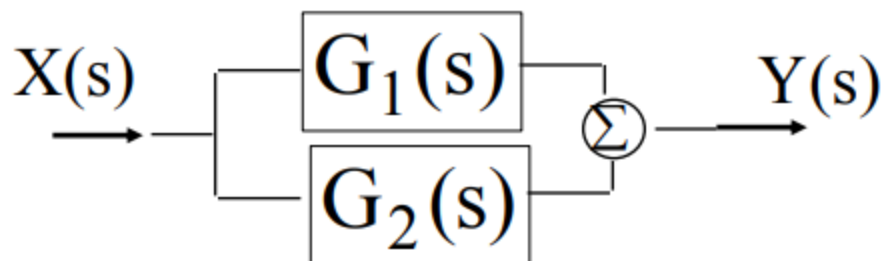
T.F. Series

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G_2(s)G_1(s)$$

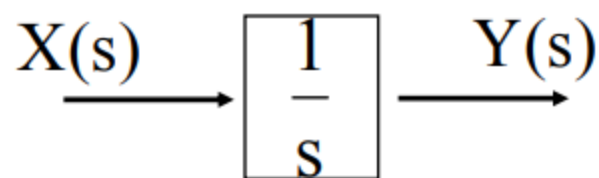
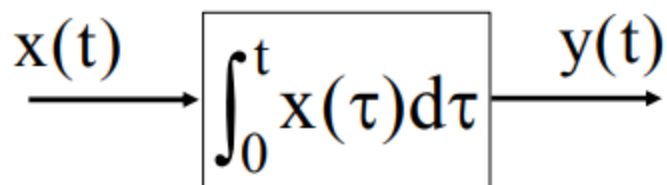


T.F. Parallel

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G_2(s) + G_1(s)$$

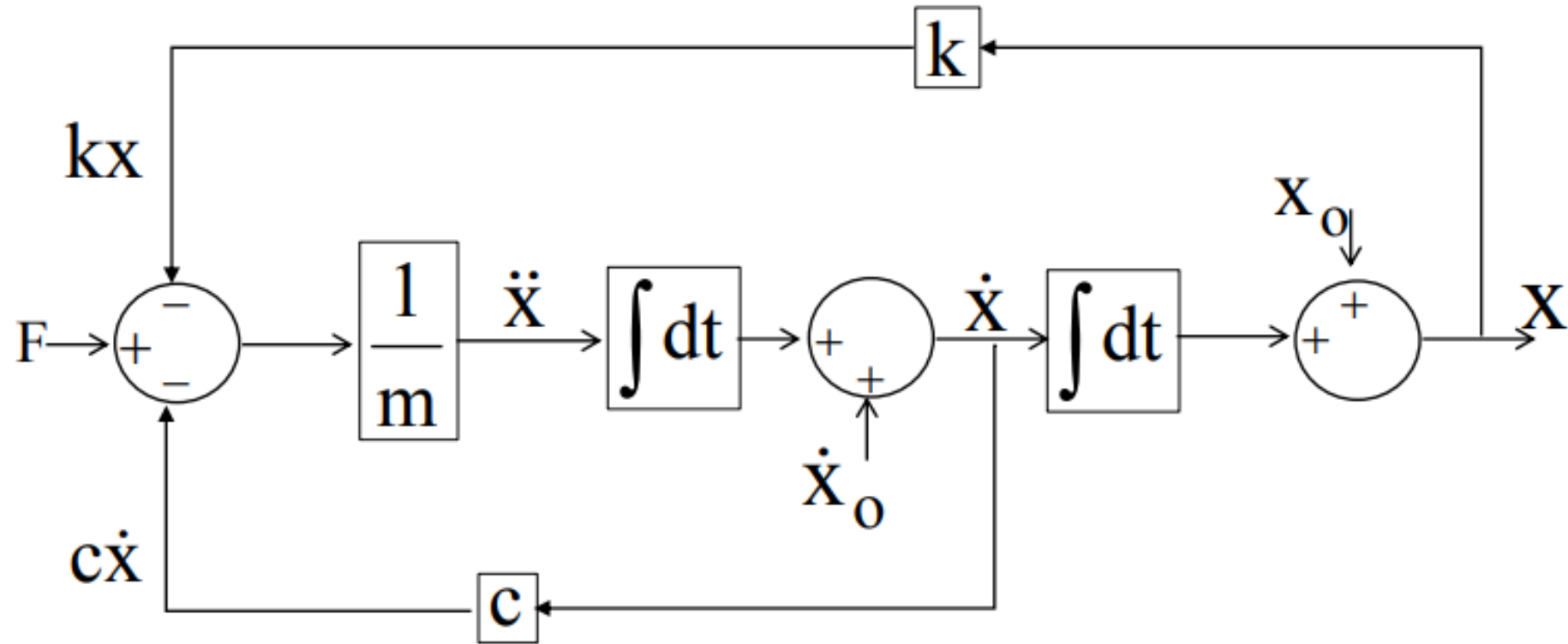


Integration

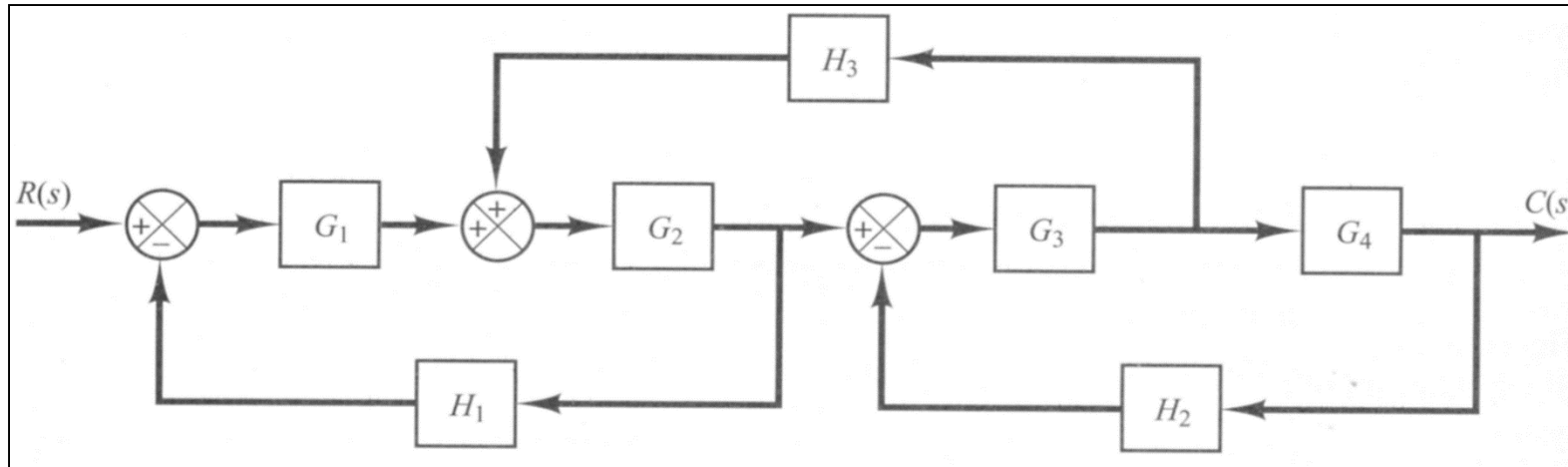


An analog block diagram for a single DOF system

$$F - kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$$



Control Systems

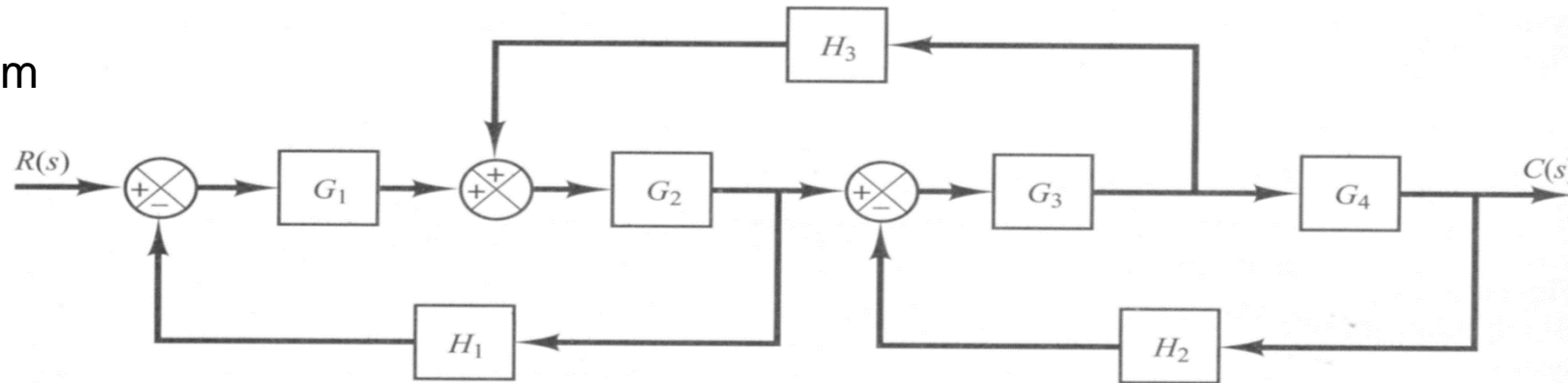


- One forward path
- Four transfer functions in the forward path G_1 , G_2 , G_3 , G_4 .
- Three Feedback Loops.
- Three Summing Junctions

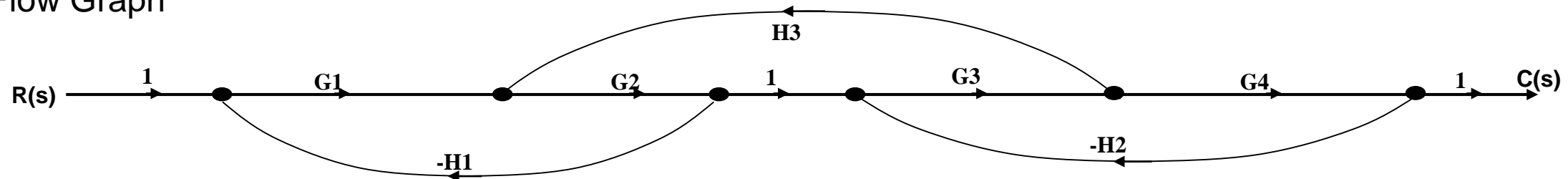
Block Diagram = Flow Graph

Besides Block diagrams, control systems are often represented using Flow Graphs

Block Diagram

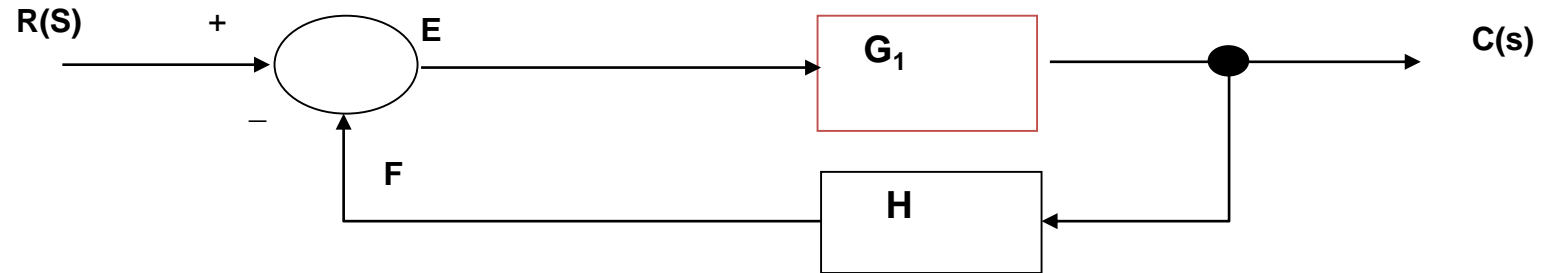


Flow Graph



Note that two of the H transfer functions in the Flow Graph have negative signs. This is necessary since the summing nodes do not have any signs associated with them as in the block diagram.

Solve For The Transfer Function



Solution:

$$C(s) = G_1 E \quad (1)$$

$$F = C(s)H \quad (2)$$

$$E = R(s) - F \quad (3)$$

$$E = R(s) - C(s)H \quad (4)$$

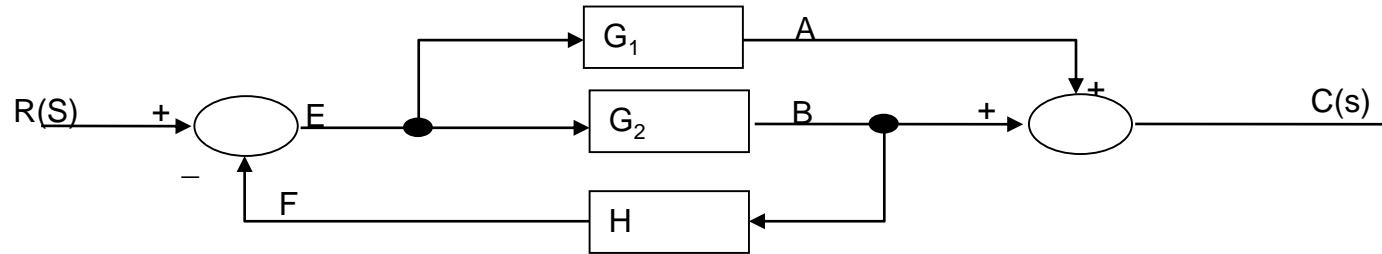
$$C(s) = G_1 [R(s) - C(s)H] \quad (5)$$

$$C(s) + C(s)HG_1 = G_1 R(s)$$

$$C(s)[1 + HG_1] = G_1 R(s)$$

$$C(s)/R(s) = G_1 / (1 + G_1 H)$$

Solve For The Transfer Function



Solution:

$$\begin{aligned} C(s) &= A + B & (1) \\ A &= G_1 E & (2) \\ B &= G_2 E & (3) \\ F &= H B & (4) \\ E &= R(s) - F & (5) \end{aligned}$$

Substitute (2) and (3) into (1);

$$C(s) = G_1 E + G_2 E = (G_1 + G_2) E \quad (6)$$

Substitute (5) into (6);

$$C(s) = (G_1 + G_2) [R(s) - F] \quad (7)$$

Substitute (3) into (4);

$$F = H G_2 E \quad (8)$$

Substitute (5) into (8);

$$F = H G_2 [R(s) - F] \quad (9)$$

Solve (9) for F;

$$F = \frac{H G_2 R(s)}{1 + G_2 H} \quad (10)$$

Substitute (10) into (7);

$$C(s) = (G_1 + G_2) \left[R(s) - \frac{H G_2 R(s)}{1 + G_2 H} \right] \quad (11)$$

$$C(s) = (G_1 + G_2) \frac{1 + G_2 H - H G_2}{1 + G_2 H} R(s)$$

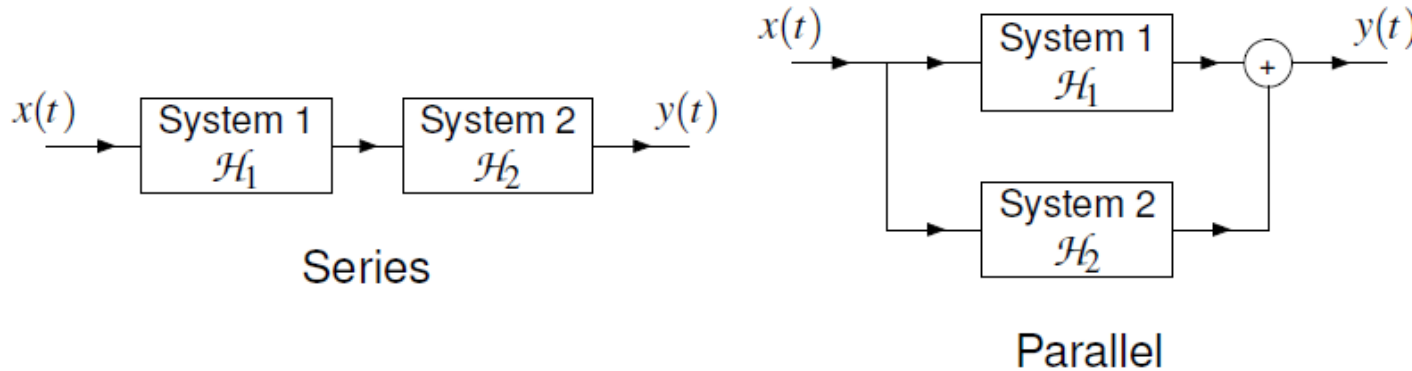
$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{(G_1 + G_2)}{1 + G_2 H}$$



Sistemlerin Birbirine Bağlanması

Interconnection of Systems

- *Two basic ways* in which systems can be interconnected are shown below.



- A **series** (or **cascade**) connection ties the output of one system to the input of the other.
- The overall series-connected system is described by the equation

$$y = \mathcal{H}_2 \{ \mathcal{H}_1 \{ x \} \} .$$

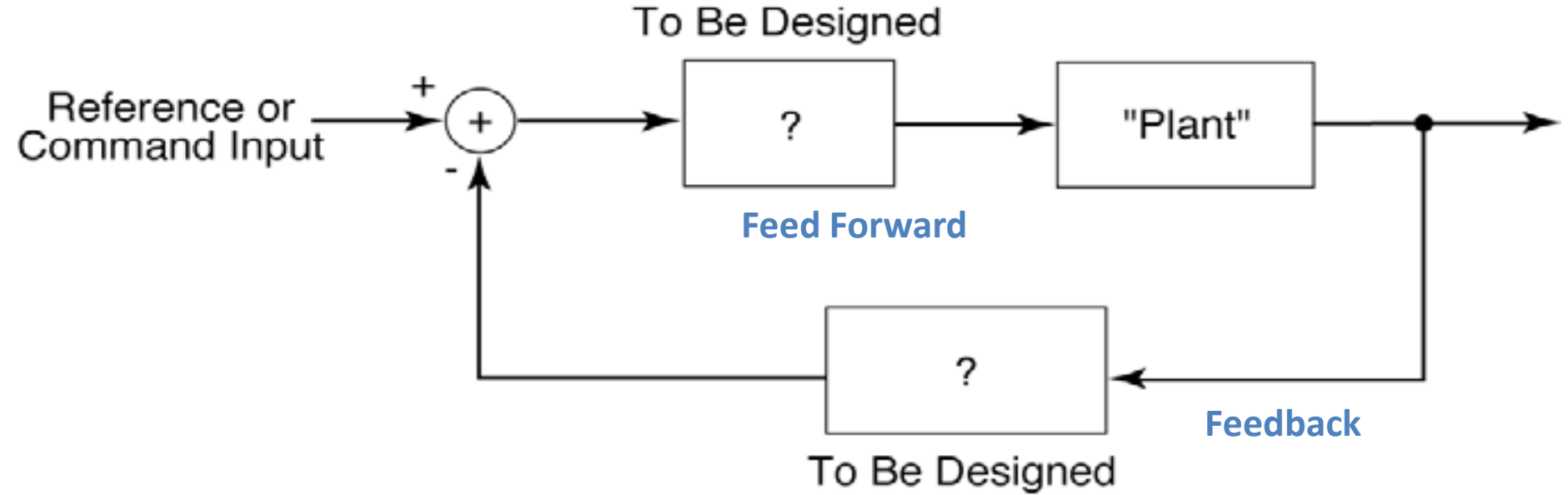
- A **parallel** connection ties the inputs of both systems together and sums their outputs.
- The overall parallel-connected system is described by the equation

$$y = \mathcal{H}_1 \{ x \} + \mathcal{H}_2 \{ x \} .$$



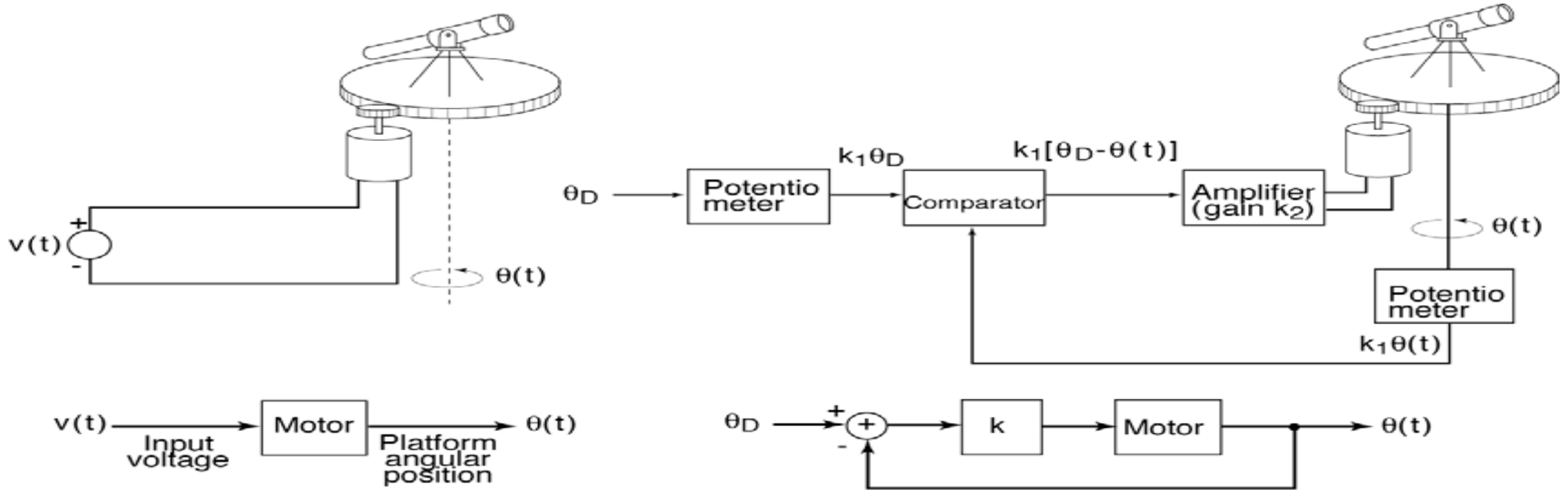
Feedback Control and Transfer Function

A Typical Feedback System



- Why use feedback?
 - Doğrusal Olmayan bileşenleri Azaltma
 - Belirsizliklere ve Değişkenliğe Duyarlılığı Azaltma
 - Kararsız Sistemlerin Stabilize Edilmesi
 - Bozulmaların Etkilerini Azaltma
 - İzleme
 - Sistem Tepki Özelliklerini Şekillendirme (bant genişliği/hız)

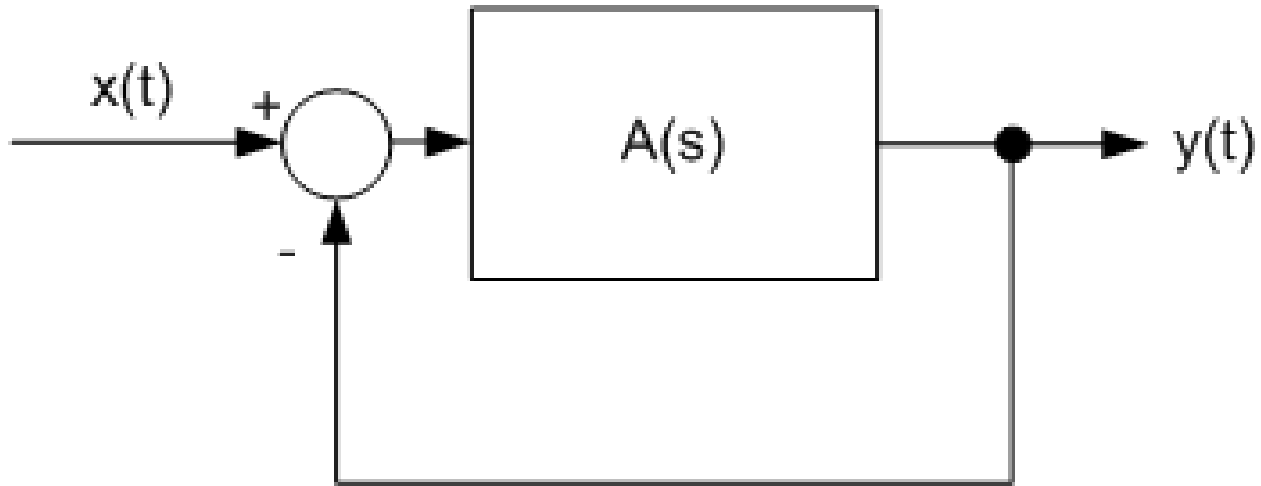
Motivating Example



- Open loop system: aim and shoot.
- What happens if you miss?
- Can you automate the correction process?

- Closed-loop system: automatically adjusts until the proper coordinates are achieved.
- Issues: speed of adjustment, inertia, momentum, stability, ...

Transfer Fonksiyonu

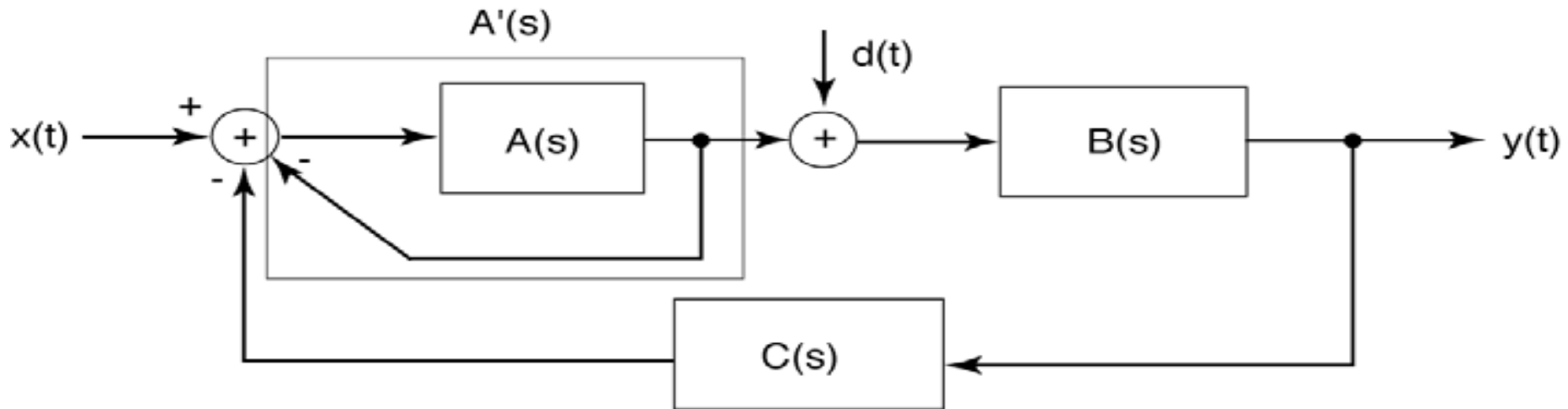


$$Y(s) = A(s) * [X(s) - Y(s)]$$

$$Y(s) = A(s)X(s) - A(s)Y(s)$$

- $[1 + A(s)]Y(s) = A(s)X(s)$
- $Y(s)/X(s) = A(s)/[1 + A(s)]$

System Function For A Closed-Loop System



$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{A'B}{1 + A'BC}$$

$$A' = \frac{A}{1 + A}$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{AB}{1 + A + ABC}$$

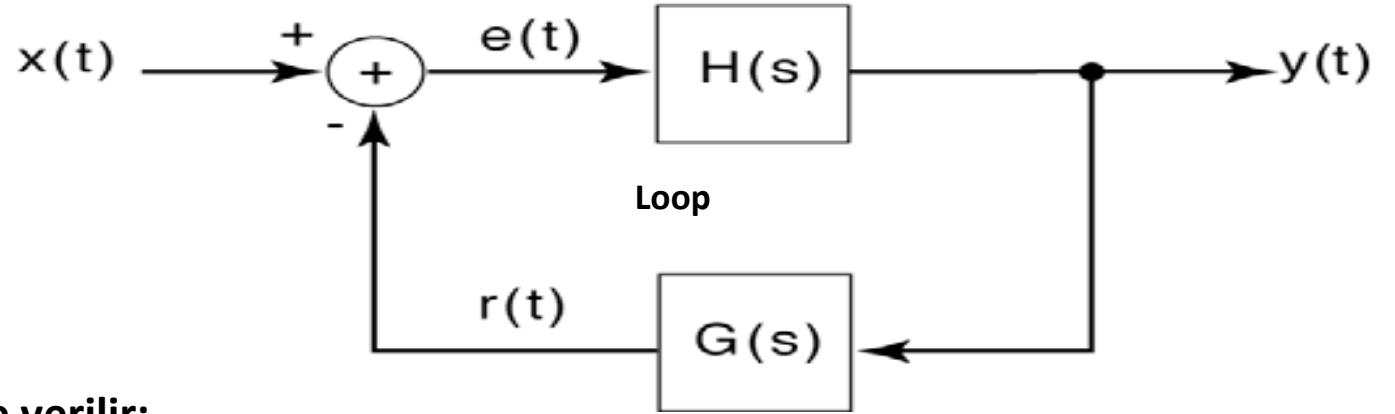
System Function For A Closed-Loop System

- The transfer function of this system :

$$E(s) = X(s) - R(s) = X(s) - G(s)Y(s)$$

$$Y(s) = H(s)E(s) = H(s)[X(s) - G(s)Y(s)]$$

$$Q(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H(s)}{1 + G(s)H(s)}$$



- Black's Formula: Kapalı döngü transfer fonksiyonu şu şekilde verilir:
- İleriye Yönelik Kazanç: Bir yazın kazancının 1 olduğu girişten çıkışa giden ileri yolun toplam kazancı.
- Döngü Kazancı: tüm sistemler tarafından paylaşılan kapalı döngü boyunca toplam kazanç..

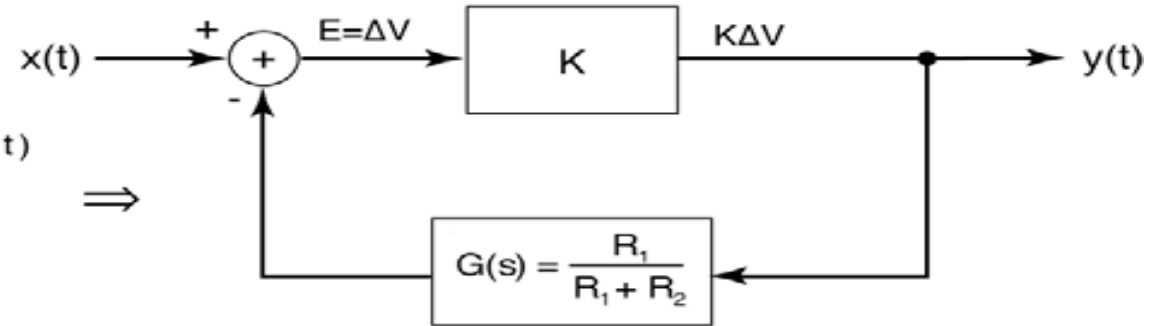
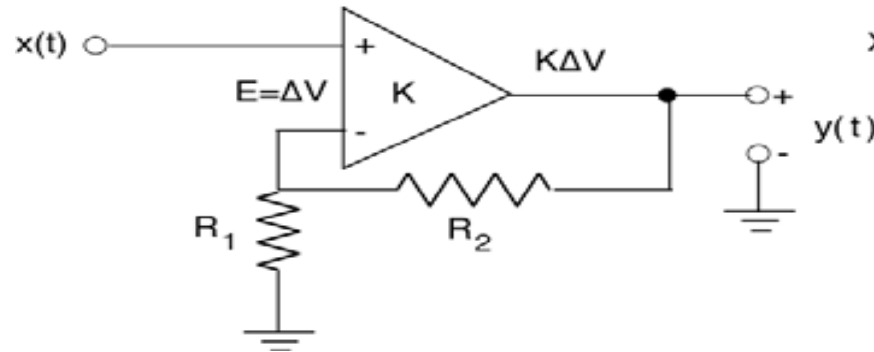
$$\frac{\text{Forward Gain}}{1 - \text{Loop Gain}}$$

The Use Of Feedback As Compensation

- Assume the open loop gain is very large (e.g., op amp):

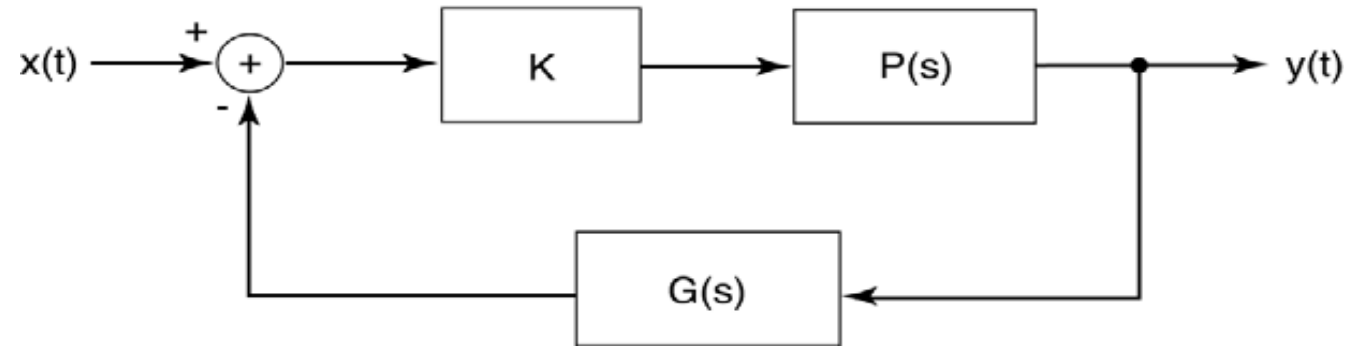
$$Q(j\omega) = \frac{KP(j\omega)}{1 + KP(j\omega)G(j\omega)}$$

$$\approx \frac{1}{G(j\omega)} \quad \leftarrow \text{Independent of } P(s)$$



$$Q(s) \approx \frac{1}{G(j\omega)} = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$$

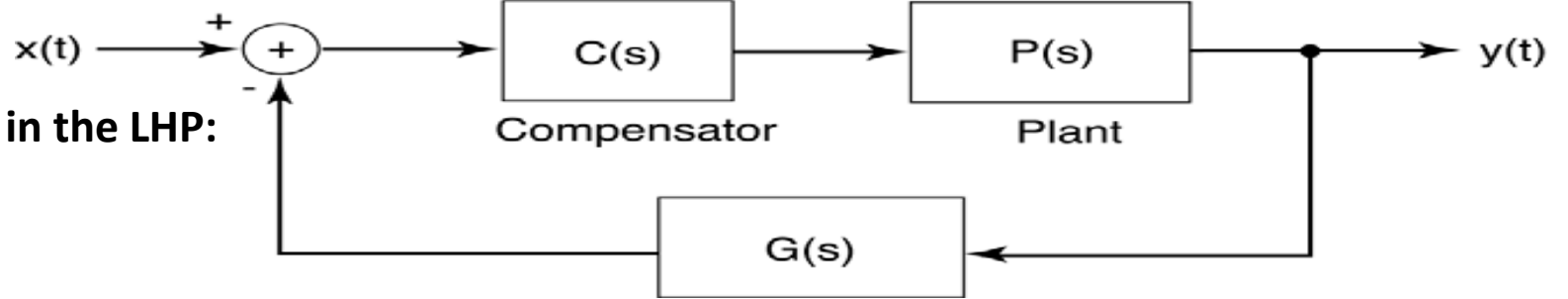
- The closed-loop gain depends only on the passive components (R_1 and R_2) and is independent of the open-loop gain of the op amp.



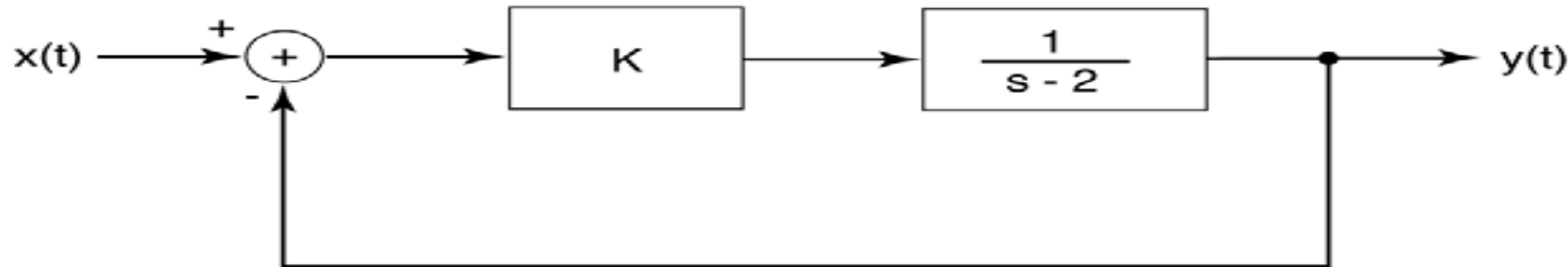
Stabilization of an Unstable System

- If $P(s)$ is unstable, can we stabilize the system by inserting controllers?
- Design $C(s)$ and $G(s)$ so that the poles of $Q(s)$ are in the LHP:

$$Q(s) = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)G(s)P(s)}$$



- Example: Proportional Feedback ($C(s) = K$)



$$P(s) = \frac{1}{s-2}$$

$$C(s) = K$$

$$G(s) = 1$$

- The overall system gain is:

$$Q(s) = \frac{\frac{K}{s-2}}{1 + \frac{K}{s-2}} = \frac{K}{s-2+K}$$

- The transfer function is stable for $K > 2$.
- Hence, we can adjust K until the system is stable.

Second-Order Unstable System

- Try proportional feedback:

$$P(s) = \frac{1}{s^2 - 4} \quad C(s) = K \quad G(s) = 1$$

$$Q(s) = \frac{K}{1 + \frac{K}{s^2 - 4}} = \frac{K}{s^2 - 4 + K}$$

One of the poles is at

$$p_1 = \sqrt{4 - K} = \begin{cases} > 0, & K < 4 \\ j\sqrt{K - 4}, & K > 4 \end{cases}$$

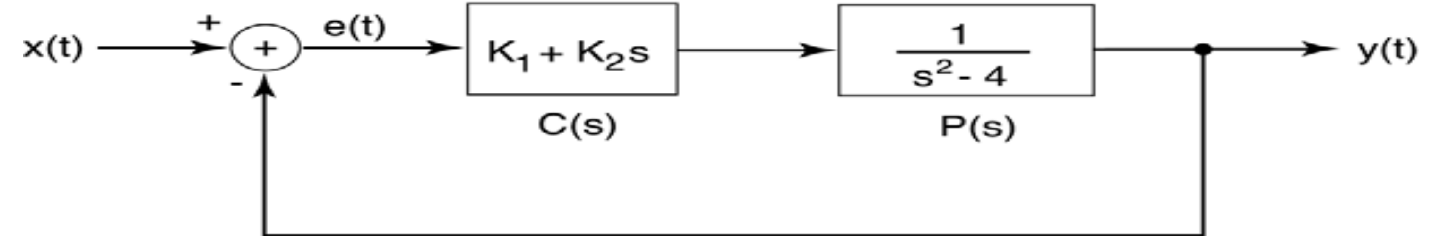
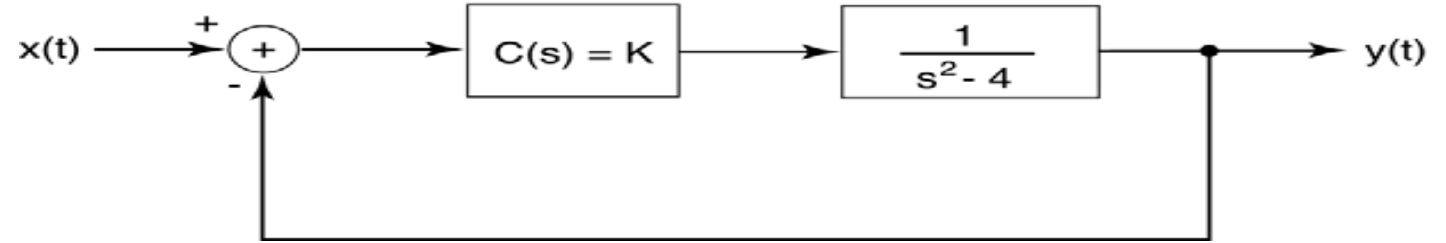
Unstable for all values of K .

- Try damping, a term proportional to d/dt :

$$Q(s) = \frac{\frac{K_1 + K_2 s}{s^2 - 4}}{1 + \frac{K_1 + K_2 s}{s^2 - 4}} = \frac{K_1 + K_2 s}{s^2 + K_2 s + K_1 - 4}$$

- This system is stable as long as:

- $K_2 > 0$: sufficient damping force
- $K_1 > 4$: sufficient gain



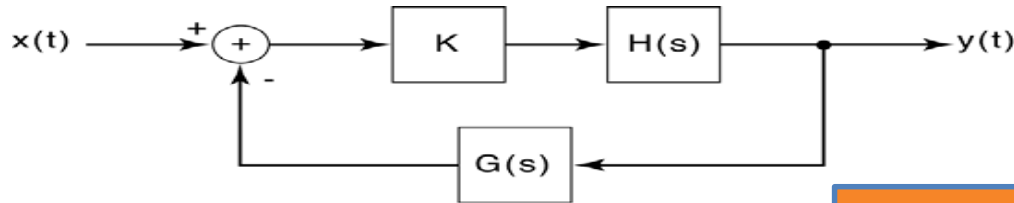
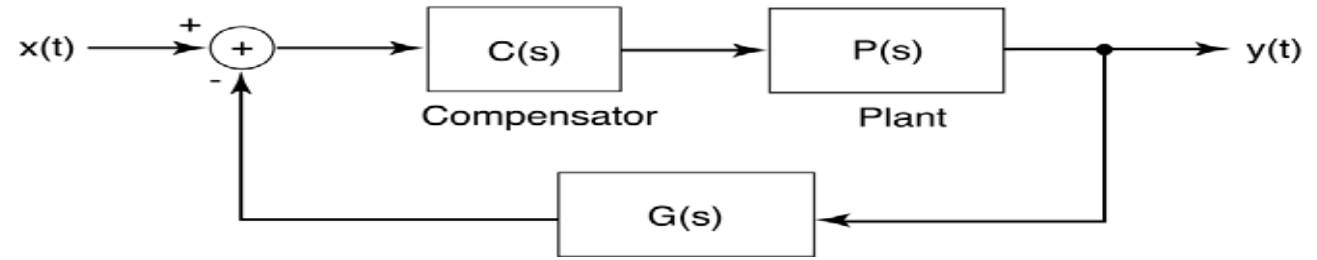
Using damping and feedback, we have stabilized a second-order unstable system.

The Concept of a Root Locus

- Recall our simple control system with transfer function:

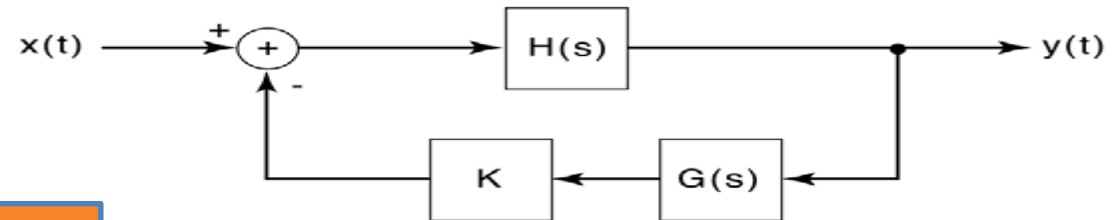
$$Q(s) = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)G(s)P(s)}$$

- The controllers $C(s)$ and $G(s)$ can be designed to stabilize the system, but that could involve a multidimensional optimization. Instead, we would like a simpler, more intuitive approach to understand the behavior of this system.
- Recall the stability of the system depends on the poles of $1 + C(s)G(s)P(s)$.
- A root locus, in its most general form, is simply a plot of how the poles of our transfer function vary as the parameters of $C(s)$ and $G(s)$ are varied.
- The classic root locus problem involves a simplified system:



$$Q(s) = \frac{KH(s)}{1 + KH(s)G(s)}$$

Closed-loop poles are the same.



$$Q(s) = \frac{H(s)}{1 + KH(s)G(s)}$$

Example: First-Order System

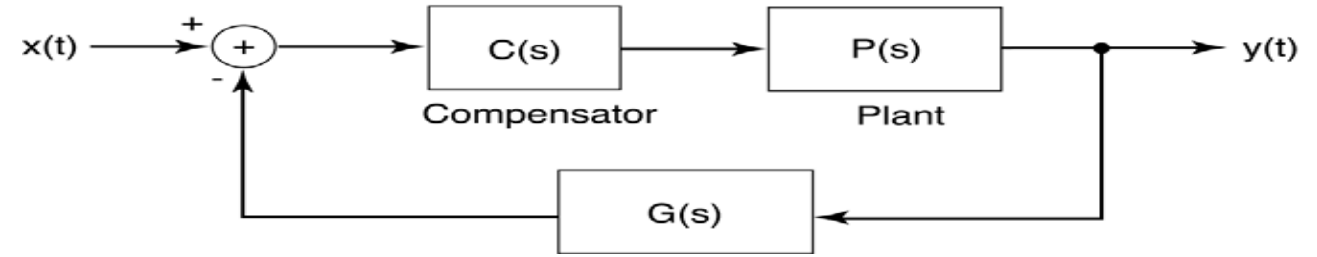
- Consider a simple first-order system:

$$H(s) = \frac{1}{s + 2}$$

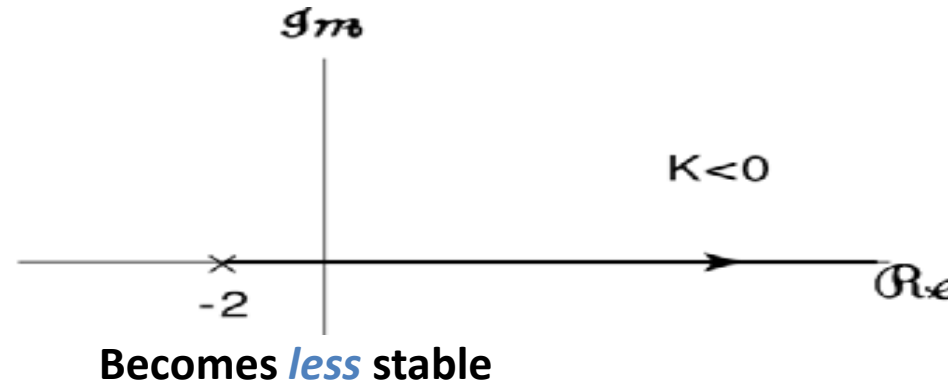
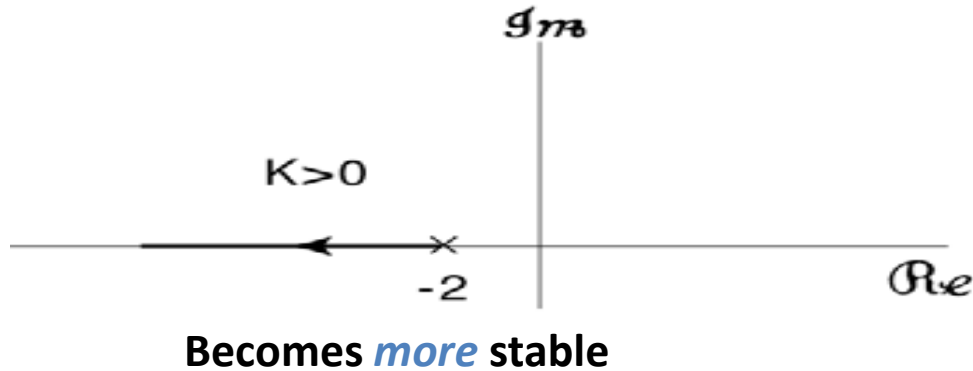
$$C(s) = K$$

$$G(s) = 1$$

$$Q(s) = \frac{C(s)H(s)}{1 + C(s)G(s)H(s)} = \frac{\frac{K}{s + 2}}{1 + \frac{K}{s + 2}} = \frac{K}{s + 2 + K}$$

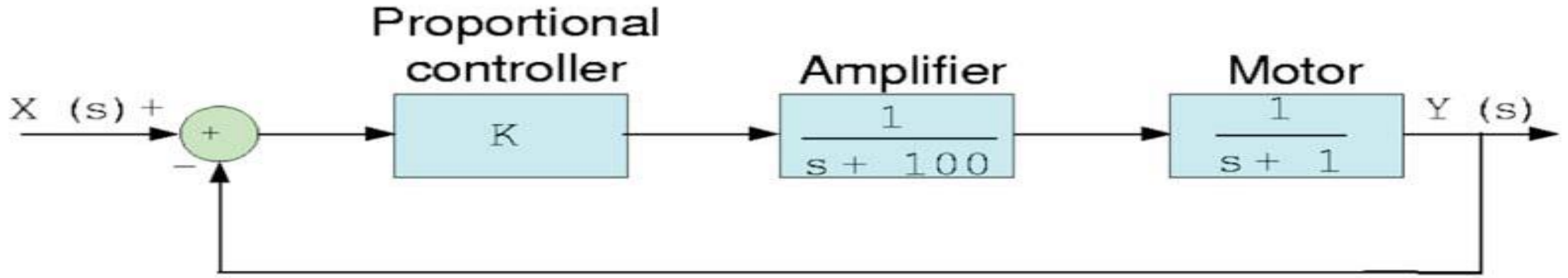


- The pole is at $s_0 = -(2+K)$. Vary K from 0 to ∞ :



- Observation: improper adjustment of the gain can cause the overall system to become unstable.

Example: Second-Order System With Proportional Control

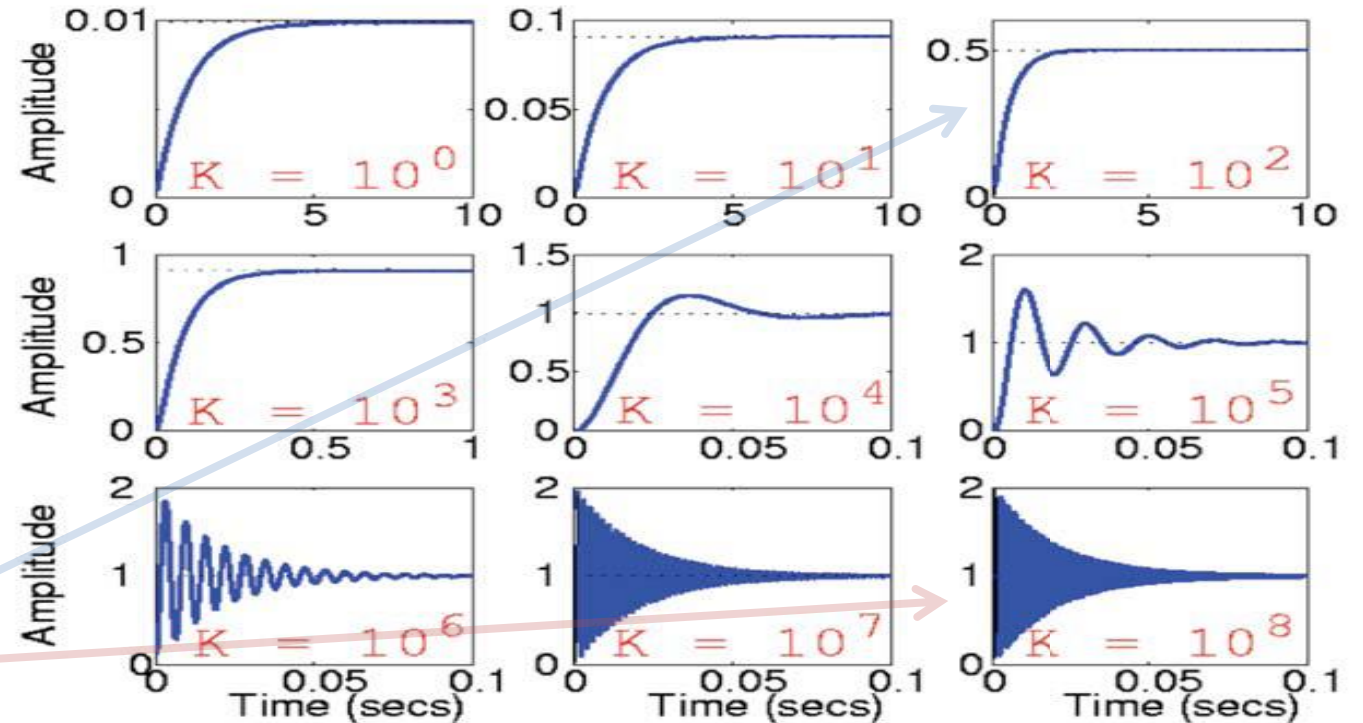


- Using Black's Formula:

$$Q(s) = \frac{K}{(s+100)(s+1) + K}$$

$$= \frac{K}{(s+100)(s+1) + K}$$

- How does the step response vary as a function of the gain, K ?
- Note that as K increases, the system goes from *too little gain* to *too much gain*.





Sinyal ve Sistem
Davranışlarının Yorumlanması

Türevin Yorumu

Birinci Türev

- Birinci ve ikinci türevlerinin verdiği bilgilerden $f'(x)$ veya df/dx olarak yazılan $f(x)$ fonksiyonunun ilk türevi, x noktasındaki teğet çizgisi fonksiyonun eğimidir.
- Grafik olmayan terimlerle ifade etmek gerekirse, ilk türev bize bir fonksiyonun nasıl arttığını veya azaldığını ve ne kadar artacağını veya azalacağını söyler.
- Pozitif eğim bize x arttıkça $f(x)$ 'nin de arttığını söyler. Negatif eğim bize x arttıkça $f(x)$ 'in azaldığını söyler. Sıfır eğim bize özel bir şey söylemez: fonksiyon o noktada artar, ne azalır veya yerel maksimumda veya yerel minimumda olabilir.

Türevler açısından bu bilgileri yazarken şunu görüyoruz:

-
- $\frac{df(p)}{dx} > 0$, ise $f(x)$, $x = p$ 'de artan bir fonksiyondur.
- $\frac{df(p)}{dx} < 0$, ise $f(x)$, $x = p$ 'de azalan bir fonksiyondur.
- $\frac{df(p)}{dx} = 0$, ise o zaman $x = p$, $f(x)$ 'in kritik noktası olarak adlandırılır ve $x(p)$ 'deki $f(x)$ 'nin davranışı hakkında yorum yapılamaz.

Türevin Yorumu

İkinci Türev

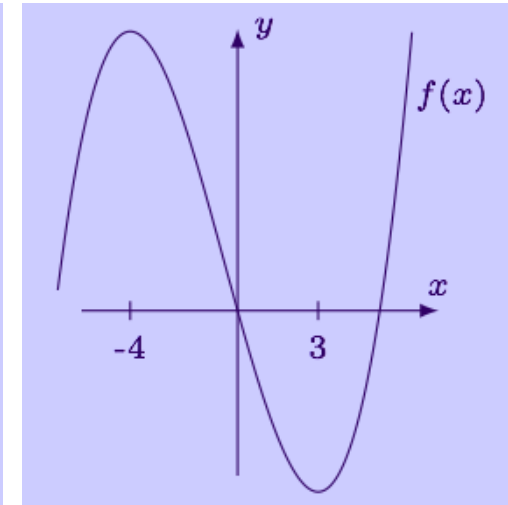
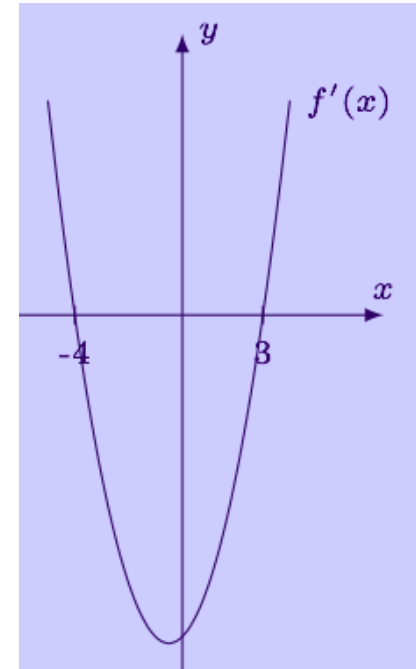
- Bir fonksiyonun ikinci türevi, $f''(x)$ veya $\frac{d^2 f}{dx^2}$ olarak yazılır. İlk türev bize fonksiyonun arttığını veya azaldığını söylese de, ikinci türev,
 - $x = p$ 'de $\frac{d^2 f(p)}{dx^2} > 0$ ise, $f(x)$, $x = p$ 'de yukarı doğru kavislidir.
 - $x = p$ 'de $\frac{d^2 f(p)}{dx^2} < 0$ ise, $f(x)$, $x = p$ 'de aşağı doğru kavislidir.
 - $x = p$ 'de $\frac{d^2 f(p)}{dx^2} = 0$ ise, o zaman $f(x)$ 'in $x = p$ 'deki davranışı hakkında bir yorum yapamıyoruz.
 -
- Birinci türevin anlamından x , $f(x)$ fonksiyonunun kritik bir noktası olduğunda, o noktada fonksiyonun davranışı hakkında bir yorum yapabilmek için, x 'in bölgesel maksimum veya bölgesel minimum olduğunu öğrenmek için genellikle işlevin ikinci türevi kullanılır.

Örnek

- $f(x)=2x^3+3x^2-72x$. Determine the intervals over which the function is increasing, and the intervals over which the function is decreasing.
- Find the first derivative.
- $f'(x)=6x^2+6x-72=6(x^2+x-12)=6(x+4)(x-3)$

Interpret the graph.

- We know that when the derivative is positive, the function is increasing. The graph above shows that the derivative is positive (i.e., above the x-axis) when $x < -4$ and when $x > 3$.
- We can also see that the derivative is negative (below the x-axis) when $-4 < x < 3$
- The function is increasing on the intervals from $(-\infty, -4) \cup (3, \infty)$. Likewise, the function is decreasing over the interval $(-4, 3)$



Özdeğer ve özvektörlerin özellikleri

Özdeğer ve özvektörlerin bazı önemli özellikleri

1. Özdeğer problemi sadece kare matrisler için tanımlıdır.
2. $\underline{A}_{n \times n}$ matrisinin daima n tane özdeğeri, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ vardır.
3. λ_i özdeğeri \underline{A} matrisinin determinantını sıfır yapar.
4. Her λ_i özdeğerine karşılık gelen bir \underline{x}_i özvektörü vardır. λ_i ve \underline{x}_i çifti beraber $(\underline{A} - \lambda_i \underline{I})\underline{x}_i = \underline{0}$ bağıntısını sağlar.
5. Özdeğerler pozitif, negatif, sıfır gerçekteki sayıları olabildiği gibi sanal sayılar da olabilir.
6. Özvektörlerin elemanları gerçekteki ve sanal sayılardan oluşabilir.
7. Elemanları gerçekteki sayılardan oluşan \underline{A} simetrik ($\underline{A}^T = \underline{A}$) ise, tüm özdeğerler de gerçekteki sayılardan oluşur. Simetrik matrisin özvektörleri ortogonaldır: $\underline{X}^T \underline{X} = \underline{I}$
8. \underline{A} simetrik ($\underline{A}^T = \underline{A}$) ve pozitif tanımlı ise tüm özdeğerler de pozitifdir.
9. Bazı özdeğerler birbirine eşit olabilir. Fakat Eşit özdeğerlerin özvektörleri mutlaka farklıdır. Çünkü özvektörler doğrusal bağımsızdır. Örneğin

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \text{ birim matrisinde } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \text{ ve özvektörler } \underline{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dir. Görüldüğü gibi, özdeğerler birbirine eşit fakat özvektörler birbirinden farklıdır.

Özdeğer ve özvektörlerin özellikleri

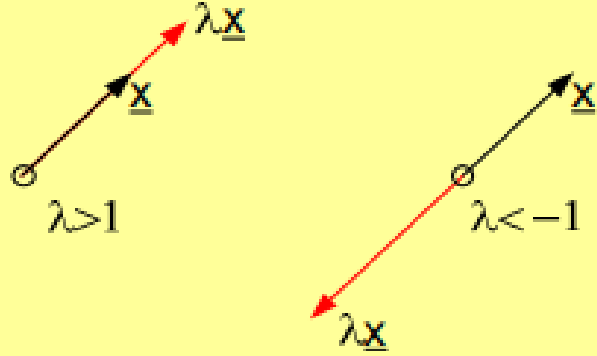
10. \underline{x}_i özvektörünün herhangi bir gerçektek c sayısı ile çarpılması veya bölünmesi sonucunda elde edilen yeni vektör de bir özvektördür. Yani yeni vektör $c\underline{x}_i$ ile de $(\underline{A} - \lambda_i \underline{D})(c\underline{x}_i) = \underline{0}$ sağlanır. Bu önemli özellik nedeniyle, istenirse, c herhangi bir gerçektek sayı seçilebilir.
11. \underline{A} ve \underline{A}^T aynı özdeğerlere sahiptir, fakat özvektörleri genelde farklıdır.
12. $\underline{A}_{n \times n}$ ve $\underline{B}_{n \times n}$ kare matrisler olmak üzere $\underline{A} \underline{B}$ ve $\underline{B} \underline{A}$ matrisleri aynı özdeğerlere sahiptir.
13. \underline{A} nın özdeğeri λ_i ise \underline{A}^{-1} in özdeğeri $1/\lambda_i$ dir. $\lambda_i = 0$ durumunda $1/\lambda_i$ tanımsızdır, bu ise \underline{A} nın tekil ve \underline{A}^{-1} in olmadığı anlamındadır.
14. $\underline{A}_{n \times n}$ matrisinin izi özdeğerlerin toplamına eşittir:
$$\text{İz } \underline{A} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n.$$
15. $\underline{A}_{n \times n}$ matrisinin determinantı özdeğerlerin çarpımına eşittir:
$$\det \underline{A} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n.$$

Dolayısıyla, özdeğerlerden herhangi biri sıfırsa, $\lambda_i = 0$, $\det \underline{A} = 0$ dir ve \underline{A}^{-1} tanımsızdır.

Özdeğer ve özvektörlerin geometrik yorumu

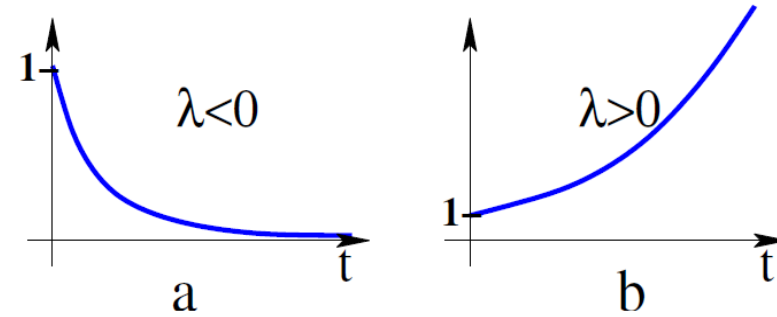
Özdeğer ve özvektörün geometrik yorumu

$A \underline{x} = \lambda \underline{x}$ bağıntısından hesaplanan λ özdeğeri ve \underline{x} özvektörü şu şekilde yorumlanabilir: A matrisi \underline{x} vektörünü λ kadar büyütmede veya küçültmektedir. \underline{x} vektörünün doğrultusu değişmemekte fakat yönü değişebilmektedir. λ pozitif ise \underline{x} ve $\lambda \underline{x}$ aynı yönde, aksi hale ters yöndedirler.



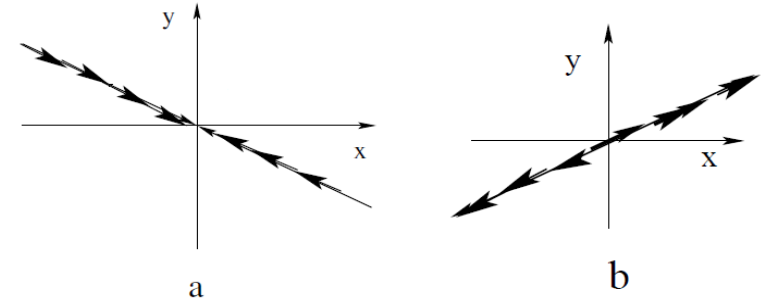
Özdeğerlerden kararlı ya da kararsız durumların belirlenmesi

- λ_1 ve λ_2 özdeğerlerine bağlı olarak birkaç farklı denge türü ortaya çıkmaktadır. Bilindiği gibi λ_1 ve λ_2 , genel ikinci dereceden bir denklem olan $|A - \lambda I| = 0$, karakteristik denklemin kökleridir. Bu nedenle kökler gerçekte veya karmaşık sayılar olabilir ve aşağıdaki denge kararlılığı durumları ortaya çıkarır.
- Özdeğerler, çözüm denkleminde $e^{\lambda_1 t}$ ve $e^{\lambda_2 t}$ katkı verirler. Bu durumda üssel negatif özdeğeri olan fonksiyon $t \rightarrow \infty$ olurken çözüme yakınsar. Üssel pozitif özdeğeri olan fonksiyon $t \rightarrow \infty$ olurken çözüme ıraksar.
- $e^{\lambda t}$, fonksiyonunun iki ana davranış türü vardır.
- $\lambda < 0$ iken t artığında $e^{\lambda t}$ kararlı bir noktaya yaklaşır.
- $\lambda > 0$ iken t artığında $e^{\lambda t}$ kararsız sonsuza gider.



Özdeğerlerden kararlı ya da kararsız durumların belirlenmesi

- Bu durumda,
- $\lambda < 0$ iken, aşağıdaki denklem kararlı bir durum belirleyecektir.
- $\lambda > 0$ iken, aşağıdaki denklem kararsız bir durum belirleyecektir.
- $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$
- Kararlı durumlar:
 - Kararlı düğüm noktası: $\lambda_1 < 0$ ve $\lambda_2 < 0$; kökler reel.
 - Kararlı spiral: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$; $\alpha < 0$;
- Kararsız durumlar:
 - Kararsız düğüm noktası: $\lambda_1 > 0$ ve $\lambda_2 > 0$; kökler reel
 - Kararsız spiral: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$; $\alpha > 0$
 - Dairesel spiral: $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$; $\alpha = 0$;
 - Eyer ya da denge noktası: $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ ya da $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$; kökler reel



Denge – Dönüm - Eyer Noktaları

- Bir f fonksiyonunun konvekslikten konkavlığa veya konkavlıktan konveksliğe geçtiği ve fonksiyonunun sürekli olduğu noktaya dönüm (büküm) noktası adı verilir.
- Denge, değişmeyen bir sistem durumudur.
- İki boyutlu bir uzayda kararlı denge: düğüm ve odak
- Bir sistemin dinamikleri bir diferansiyel denklem veya bir diferansiyel denklem sistemi ile tanımlanıyorsa, o zaman denge noktası bir türevi (tüm türevleri) sıfıra ayarlayarak tahmin edilebilir.
- Özdeğerlerin hiçbirinin gerçek kısmı yoksa denge noktası hiperboliktir.
- Tüm özdeğerlerin negatif gerçek kısmı varsa, denge kararlı bir denklemdir.
- En az birinin pozitif bir gerçek kısmı varsa, denge kararsız bir düğümdür.
- En az bir özdeğerin negatif gerçek kısmı varsa ve en az birinin pozitif gerçek kısmı varsa, denge bir eyer noktasıdır.

Denge durum noktaları ve faz düzlemleri

- Lineer veya lineer olmayan tipten $\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$, denklemler teorisinde $x(t)$ çoğu kez x -ekseninde hareket eden bir noktanın t anındaki yerini ve $y(t) = \dot{x}(t)$ de t anındaki hızını tanımlar. $(x(t), y(t))$ ikilisi, birlikte, sistemin t anındaki durumunu belirler.
-
- Sistemin davranışı, (x, y) -düzleminde $(x(t), y(t))$ noktasının geometrik yeri ile tarif edilebilir. Bu biçimde diferansiyel denklem ile ilişkilendirilen (x, y) -düzlemi faz düzlemi olarak adlandırılır. $(x(t), y(t))$ parametrik çözüm eğrisine yörünge ve onun görüntüsüne de orbit veya iz denir. Bir yörünge ile orbit arasındaki fark, yörüngeyi çözüm eğrisinin oryantasyonunu veren t parametresi ile donatılmış olmasıdır.
-
- $\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$, genel denklemi için, denge noktaları x ekseninde bulunur ve tüm $f(x, 0) = 0$ çözümleri tarafından tanımlanır. (x, y) ($y = \dot{x}$) düzlemdeki faz yolları birinci mertebeden denklemin çözümleri yardımıyla belirlenir.

Denge durum noktaları ve faz düzlemleri

- $y(t) = \dot{x} = \frac{dx}{dt}$

-

- $\ddot{x} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = y \frac{dy}{dx} = f(x, y)$

-

- $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)}{y}$

-

- $\frac{dy}{dx} = \frac{\ddot{x}}{\dot{x}}$

-

- x ve y eksenlerindeki ölççeklerin her zaman aynı olmadığı unutulmamalıdır. Genellikle eş zamanlı diferansiyel denklemler olarak muamele edilen $f(x, y)$ çözümü olan $(x(t), y(t))$, t cinsinden parametrik olarak elde edilir.

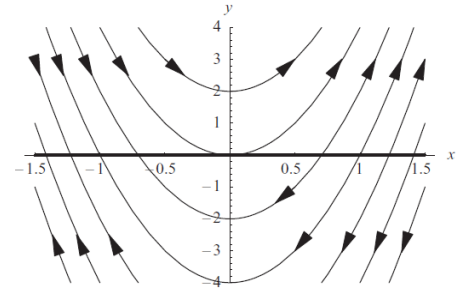
-

Denge durum noktaları ve faz düzlemleri

- $\ddot{x} - 8\dot{x}x = 0$ diferansiyel $f(x, y) = 8xy$ olur. $f(x, 0) = 0$ olduğundan, x eksenindeki her nokta bir denge noktasıdır. Faz yolları için diferansiyel denklem,
- $\ddot{x} = 8\dot{x}x$
- $\dot{x} = y$
- $\dot{y} = 8xy$
-
- $\frac{dy}{dx} = 8x$, genel çözüm, $y=4x^2 + C$ dir.
- $f(x, y) = 8xy$ denkleminin faz çözüm çizgileri aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Matlab Yazılım kodu:

```
clear all
close all
x = linspace(-1.5,1.5,15);
y = linspace(-4,4,15);
[M1,M2]=size(y);
[X,Y] = meshgrid(x,y);
U = Y;
for i=1:M2
    for j=1:M2
        V(i,j)=-8*X(i,j)*Y(i,j);
    end
end
figure(1), quiver(X,Y,U,V,'r')
```

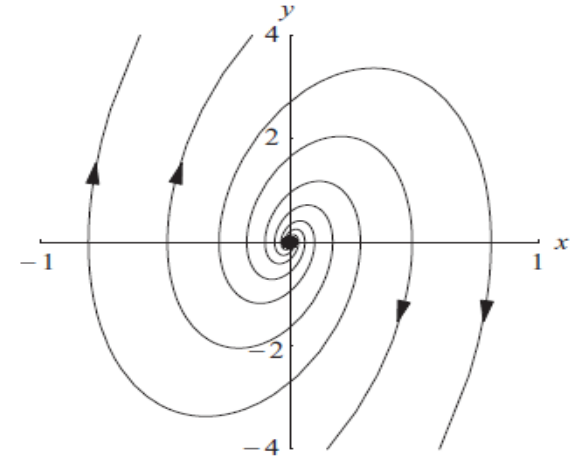


Denge durum noktaları ve faz düzlemleri

- $\ddot{x} - 4\dot{x} + 40x = 0$
diferansiyel $f(x, y) = 4y - 40x$ olur. $f(x, 0) = 0$ olduğundan, x eksenindeki her nokta bir denge noktasıdır. Faz yolları için diferansiyel denklem,
- $f(x, y) = 4y - 40x$ denkleminin faz çözüm çizgileri aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Matlab Yazılım Kodu:

```
clear all
close all
x = linspace(-1,1,20);
y = linspace(-4,4,20);
[M1,M2]=size(y);
[X,Y] = meshgrid(x,y);
U = Y;
for i=1:M2
    for j=1:M2
        F(i,j)=-40*X(i,j)+4*Y(i,j);
    end
end
figure(1), quiver(X,Y,U,F,'r')
```



Belirsizlik

Bir f fonksiyonunun konvekslikten konkavlığa veya konkavlıktan konveksliğe geçtiği ve fonksiyonunun sürekli olduğu noktaya dönüm (büküm) noktası adı verilir.

$\frac{\infty}{\infty}$ Belirsizlik Hali

Bu belirsizlik halinde de L' Hospital Kuralı geçerlidir. Zira $\frac{u}{v} = \frac{1}{v} : \frac{1}{u}$ biçiminde yazılabilir. Bu durumda $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği $\frac{0}{0}$ belirsizliğe döndürür.

- **0.∞ Belirsizlik Hali**

$u \cdot v = \frac{u}{\frac{1}{v}}$ eşitliği yardımıyla 0.∞ belirsizliği $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ haline getirilebilir.

- **∞-∞ Belirsizlik Hali**

Bu belirsizlik hali, $u - v = \frac{\frac{1}{v} - \frac{1}{u}}{\frac{1}{uv}}$ eşitliği yardımıyla $\frac{0}{0}$ belirsizlik haline dönüştürülebilir.

- **0⁰, ∞⁰, 1[∞] Belirsizlik Halleri**

x sonlu bir değere veya $\pm\infty$ değerlerine yaklaştığında $y = [u(x)]^{v(x)}$ biçimindeki fonksiyonlar bu belirsizlik hallerinden birini verebilir. Bu durumda her iki tarafın logaritması alınarak

$$\ln y = v(x) \ln u(x)$$

eşitliği elde edilir. Sağdaki ifadenin limiti, 0.∞ belirsizliğine sahip olur. Bu limiti bilinen yolla hesaplanır.

$$\lim_{x \rightarrow a} \ln y = \lambda \text{ ise } \lim_{x \rightarrow a} y = e^\lambda \text{ olur.}$$

Numerical Integration and Differentiation of a Polynomial

```
clear all; close all
```

```
M=41, s=(M-1)/20;
```

```
for i=1:M, t(i)=-s+(i-1)*0.1; end
```

```
% y(t)=2*t^3+3*t^2-2*t-5
```

```
P=[2 3 -2 -5];
```

```
P=[2 3 -2 -5];
```

```
Q = polyder(P)
```

```
I = polyint(P,1)
```

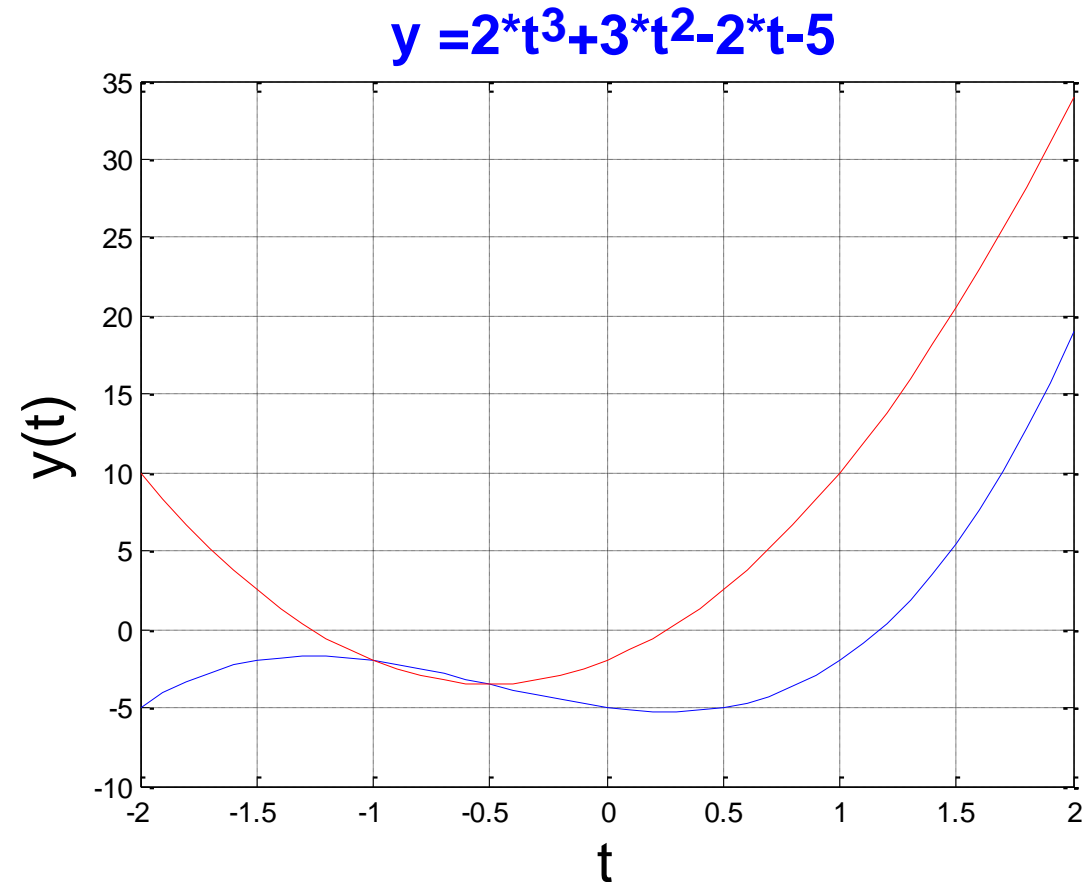
```
figure, plot(t,polyval(P,t),'b', t,polyval(Q,t),'r' )
```

```
title('\fontsize{20}\bf y =2*t^{3}+3*t^{2}-2*t-5','Color','b')
```

```
xlabel('t','FontSize', 20)
```

```
ylabel('y(t)','FontSize', 20)
```

```
grid on
```



Symbolic Derivative - Integral

- clear all,
- close all
- syms f(t),t
- $f(t) = 2*t^3+3*t^2-2*t-5;$
- $df = \text{diff}(f,t)$
- $f1 = \text{int}(df,t)$

- $df(t) = 6*t^2 + 6*t - 2$
- $f1(t) = t*(2*t^2 + 3*t - 2)$

“Fonksiyonlar”

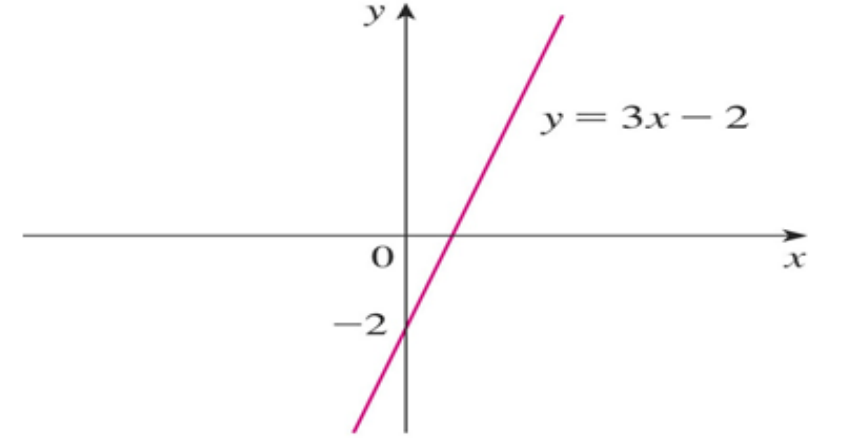
Doğrusal Modeller

- y'nin x'in doğrusal bir fonksiyonu olduğunu söylediğimizde, fonksiyonun grafiğinin bir doğru olduğunu kastediyoruz.
- Böylece, bir doğrunun denkleminin eğim-kesme noktası formunu aşağıdaki fonksiyon için bir formül yazmak için kullanabiliriz:

$$y = f(x) = mx + b$$

burada m, doğrunun eğimi ve b, y kesme noktasıdır.

- Doğrusal fonksiyonların karakteristik bir özelliği, sabit bir oranda büyümeleridir.
- Örneğin, şekilde, $f(x) = 3x - 2$ doğrusal fonksiyonunun bir grafiği ve örnek değerler tablosu verilmiştir.
- 3 değeri grafiğinin eğimi, y'nin x'e göre değişim oranı olarak yorumlanabilir.
- X değeri 0.1 arttığında, f(x) değerinin 0.3 arttığına dikkat edin.
- Yani, f(x), x'in üç katı hızlı artar.



x	$f(x) = 3x - 2$
1.0	1.0
1.1	1.3
1.2	1.6
1.3	1.9
1.4	2.2
1.5	2.5

Doğrusal Modeller

Kuru hava yukarı doğru hareket ettikçe genişler ve soğur. Zemin sıcaklığı 20°C ve 1 km yükseklikteki sıcaklık 10°C ise, doğrusal bir modelin uygun olduğunu varsayarak sıcaklığı T ($^{\circ}\text{C}$ cinsinden) yüksekliğin (kilometre cinsinden) bir fonksiyonu olarak ifade edin. Fonksiyonun grafiğini çizin. Eğim neyi temsil ediyor? 2.5 km yükseklikte sıcaklık nedir?

T , h 'nin doğrusal bir fonksiyonu olduğunu varsaydığımız için, $T = mh + b$ yazabiliriz.

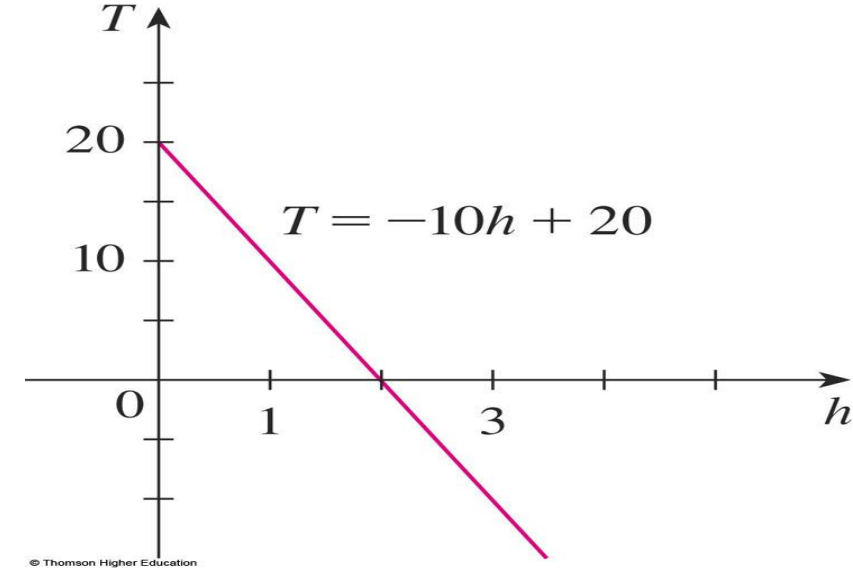
$h = 0$, yani $20 = m \cdot 0 + b$ olduğunda, y kesme noktası $b = 20$ 'dir. Ayrıca, $h = 1$ olduğunda $T = 10$, $m = -10$ olur.

Gerekli doğrusal fonksiyon $T = -10h + 20$ 'dir.

Eğim $m = -10^{\circ}\text{C} / \text{km}$ 'dir.

Bu, yüksekliğe göre sıcaklık değişim oranını temsil eder.

$h = 2,5$ km yükseklikte sıcaklık: $T = -10(2,5) + 20 = -5^{\circ}\text{C}$ 'dir.



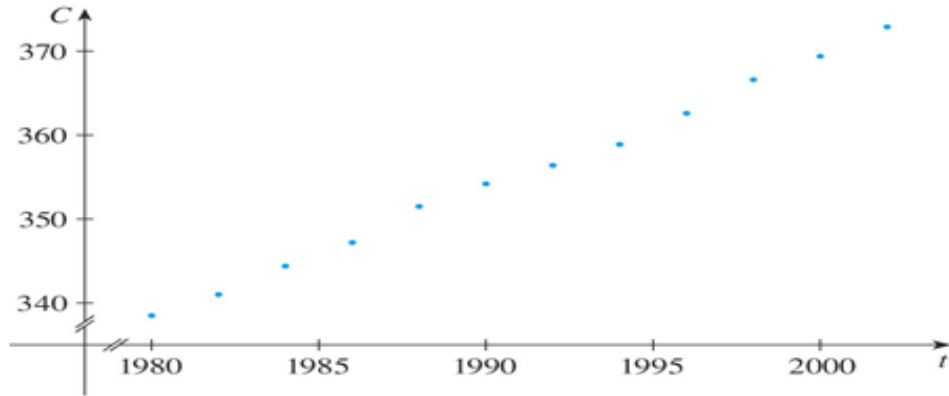
Deneysel Model (Empirical Model)

Bir modeli formüle etmemize yardımcı olacak fiziksel bir yasa veya ilke ya da matematiksel bir denklem yoksa, deneysel bir model oluşturulur.

Deneysel Model tamamen toplanan verilere dayanmaktadır. Veri noktalarının temel eğilimini yakalaması anlamında verilere "uyan" bir eğri aranır.

Örnek: Tablo, 1980'den 2002'ye kadar Mauna Loa Gözlemevi'nde milyonda parça olarak ölçülen atmosferdeki ortalama karbondioksit (CO₂) seviyesini listelemektedir. CO₂ seviyesi için bir model bulmak için verileri kullanın. Lineer model oluşturun.

Şekilde gösterilen dağılım grafiğini yapmak için tablodaki verileri kullanırız. Grafikte t zamanı (yıl olarak) ve C, CO₂ seviyesini (milyonda parça, ppm) temsil eder.



Scatter plot for the average CO₂ level

Year	CO ₂ level (in ppm)	Year	CO ₂ level (in ppm)
1980	338.7	1992	356.4
1982	341.1	1994	358.9
1984	344.4	1996	362.6
1986	347.2	1998	366.6
1988	351.5	2000	369.4
1990	354.2	2002	372.9

Doğrusal Modeller

Notice that the data points appear to lie close to a straight line.

- So, in this case, it's natural to choose a linear model.

However, there are many possible lines that approximate these data points.

- So, which one should we use?

One possibility is the line that passes through the first and last data points.

The slope of this line is:

$$\frac{372.9 - 338.7}{2002 - 1980} = \frac{34.2}{22} \approx 1.5545$$

Doğrusal Modeller

- The equation of the line is: $C - 338.7 = 1.55(t - 1980)$ or $C = 1.55t - 2739$
- This equation gives one possible linear model for the CO2 level. It is graphed in the figure.
- Although our model fits the data reasonably well, it gives values higher than most of the actual CO2 levels.
- A better linear model is obtained by a procedure from statistics called linear regression.
- If we use a graphing calculator, we enter the data from the table into the data editor and choose the linear regression command.
- With Maple, we use the `fit[leastsquare]` command in the stats package.
- With Mathematica, we use the `Fit` command.

Doğrusal Modeller

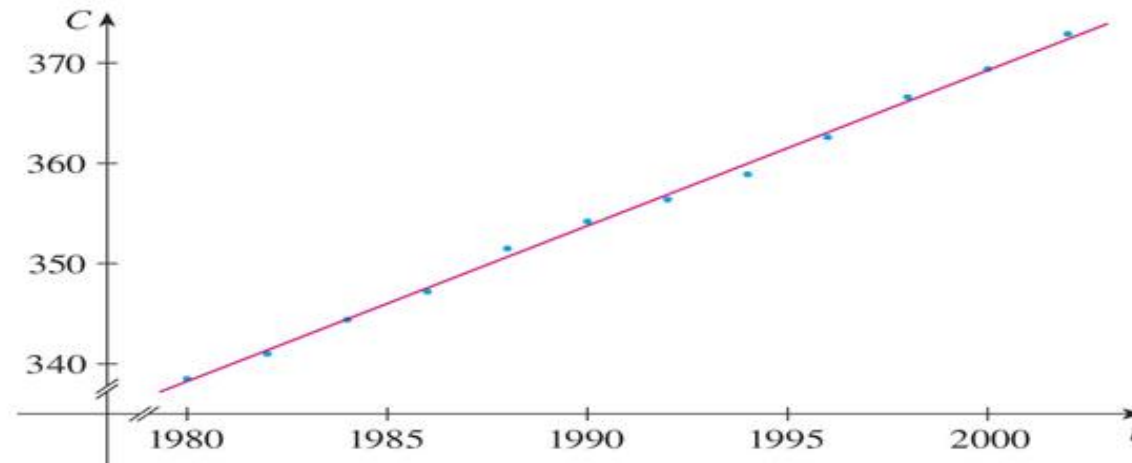
The machine gives the slope and y-intercept of the regression line as:

$$m = 1.55 \qquad b = -2734$$

So, our least squares model for the level CO_2 is: $C = 1.55t - 2734$

In the figure, we graph the regression line as well as the data points.

Comparing with the earlier figure, we see that it gives a better fit than our previous linear model.



Doğrusal Modeller

Use the linear model given by Equation 2 to estimate the average CO₂ level for 1987 and to predict the level for 2010.

- According to this model, when will the CO₂ level exceed 400 parts per million?
- Using Equation 2 with $t = 1987$, we estimate that the average CO₂ level in 1987 was: $C(1987) = (1.55)(1987) - 2734$
- This is an example of interpolation—as we have estimated a value between observed values.
- In fact, the Mauna Loa Observatory reported that the average CO₂ level in 1987 was 348.93 ppm.
- So, our estimate is quite accurate.

Doğrusal Modeller

With $t = 2010$, we get:

$$C(2010) = (1.55)(2010) - 2734 = 384.81$$

So, we predict that the average CO₂ level in 2010 will be 384.8 ppm.

- This is an example of extrapolation—as we have predicted a value outside the region of observations.
- Thus, we are far less certain about the accuracy of our prediction.

Doğrusal Modeller

Using Equation 2, we see that the CO₂ level

exceeds 400 ppm when: $1.55192t - 2734.55 > 400$

Solving this inequality, we get: $t > \frac{3134.55}{1.55192} \approx 2019.79$

- Thus, we predict that the CO₂ level will exceed 400 ppm by 2019.
- This prediction is somewhat risky—as it involves a time quite remote from our observations.

Polynomials

A function P is called a polynomial if $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ where n is a nonnegative integer and the numbers $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ are constants called the coefficients of the polynomial.

The domain of any polynomial is $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

If the leading coefficient $a_n \neq 0$, then the degree of the polynomial is n .

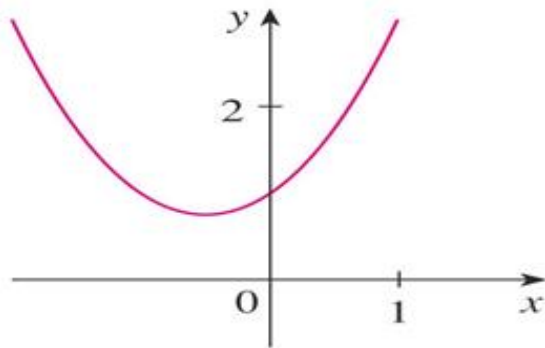
– For example, the function

$$P(x) = 2x^6 - x^4 + \frac{2}{5}x^3 + \sqrt{2}$$

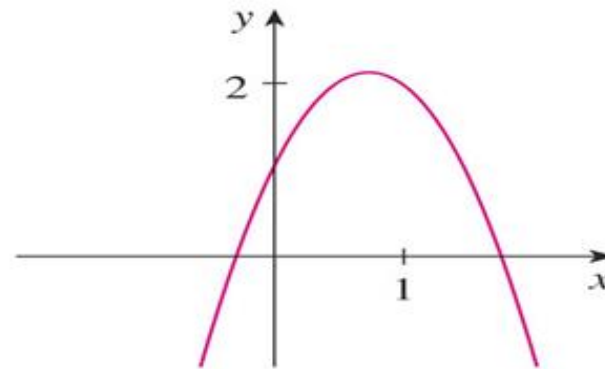
is a polynomial of degree 6.

Polynomials

- A polynomial of degree 1 is of the form $P(x) = mx + b$. So, it is a linear function.
- A polynomial of degree 2 is of the form $P(x) = ax^2 + bx + c$. It is called a quadratic function.
- Its graph is always a parabola obtained by shifting the parabola $y = x^2$. The parabola opens upward if $a > 0$ and downward if $a < 0$.



(a) $y = x^2 + x + 1$

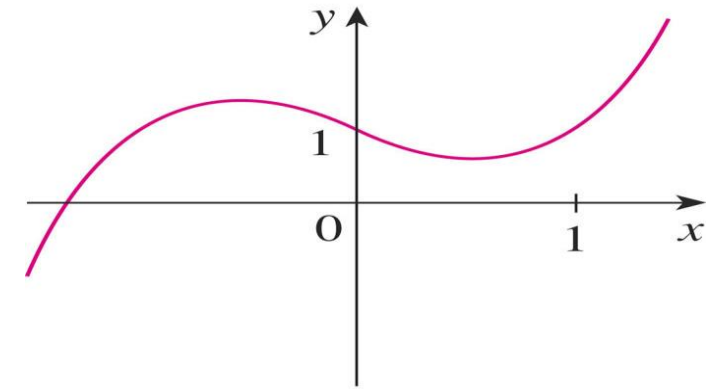


(b) $y = -2x^2 + 3x + 1$

A polynomial of degree 3 is of the form

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$$

It is called a cubic function.

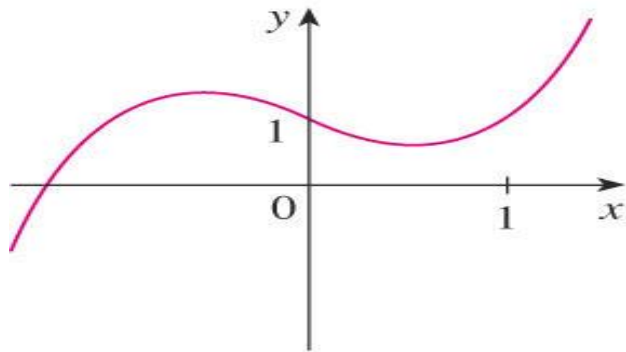


(a) $y = x^3 - x + 1$

POLYNOMIALS

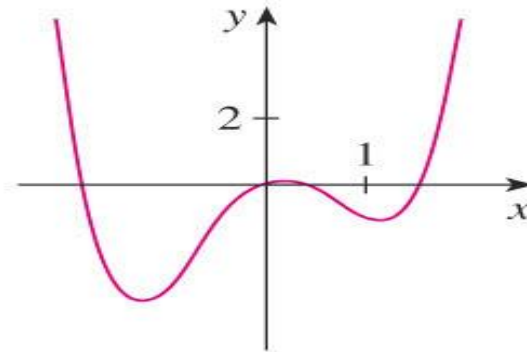
We will see later why these three graphs have these shapes.

Polynomials are commonly used to model various quantities that occur in the natural and social sciences.

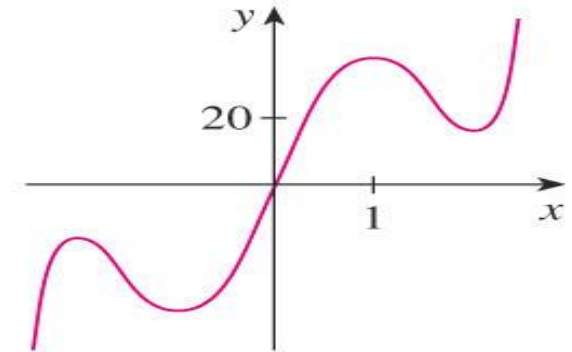


(a) $y = x^3 - x + 1$

© Thomson Higher Education



(b) $y = x^4 - 3x^2 + x$

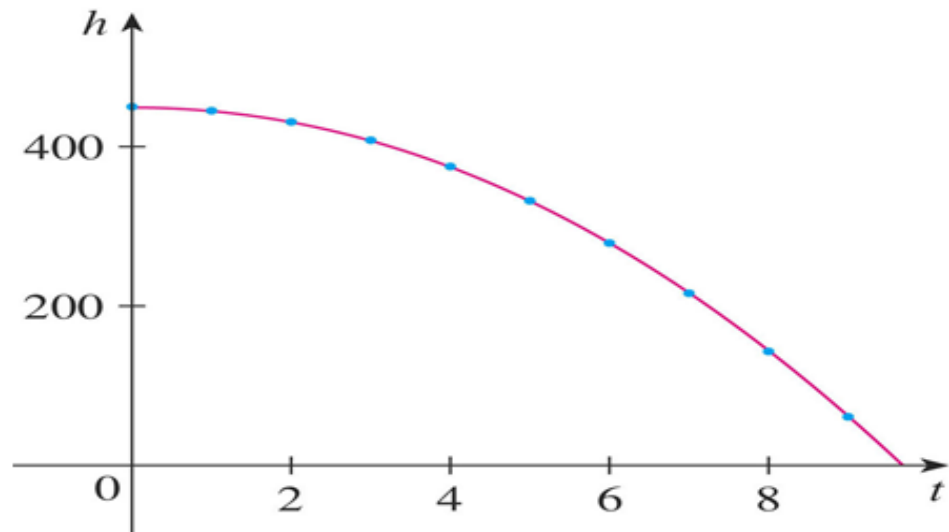


(c) $y = 3x^5 - 25x^3 + 60x$

POLYNOMIALS

A ball is dropped from the upper observation deck of the CN Tower—450 m above the ground—and its height h above the ground is recorded at 1-second intervals.

- Find a model to fit the data and use the model to predict the time at which the ball hits the ground.



Time (seconds)	Height (meters)
0	450
1	445
2	431
3	408
4	375
5	332
6	279
7	216
8	143
9	61

POLYNOMIALS

- We draw a scatter plot of the data. We observe that a linear model is inappropriate.
- However, it looks as if the data points might lie on a parabola. So, we try a quadratic model instead.
- Using a graphing calculator or computer algebra system (which uses the least squares method), we obtain the following quadratic model $= 449.36 + 0.96t - 4.90t^2$
- We plot the graph of Equation 3 together with the data points. We see that the quadratic model gives a very good fit.

POLYNOMIALS

The ball hits the ground when $h = 0$. So, we solve the quadratic equation $-4.90t^2 + 0.96t + 449.36 = 0$

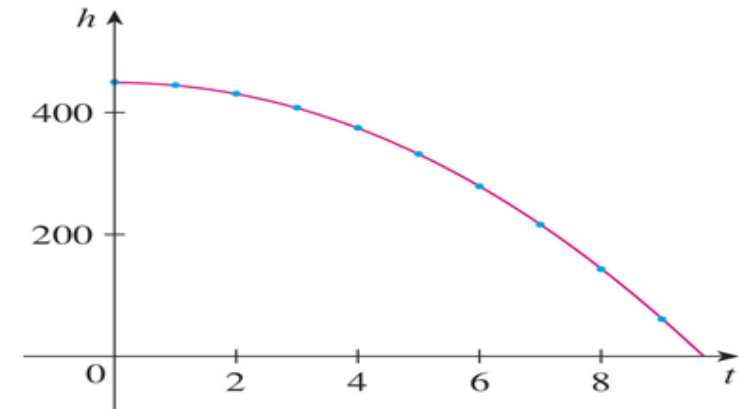
The quadratic formula gives

$$t = \frac{-0.96 \pm \sqrt{(0.96)^2 - 4(-4.90)(449.36)}}{2(-4.90)}$$

$t \approx 9.67$

– The positive root is

– So, we predict the ball will hit the ground after about 9.7 seconds.

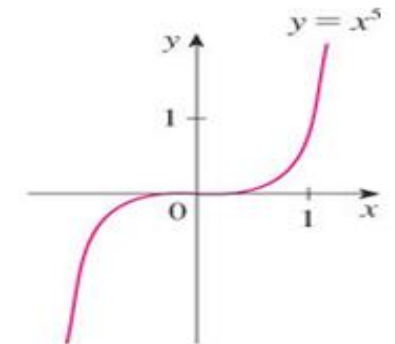
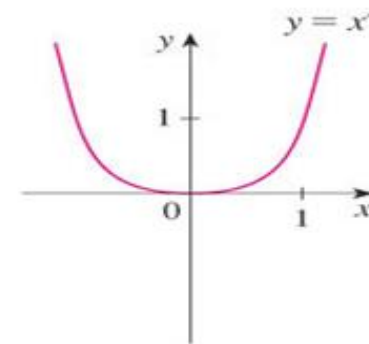
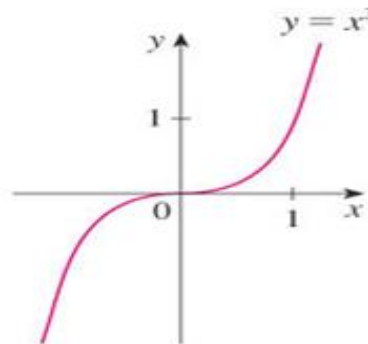
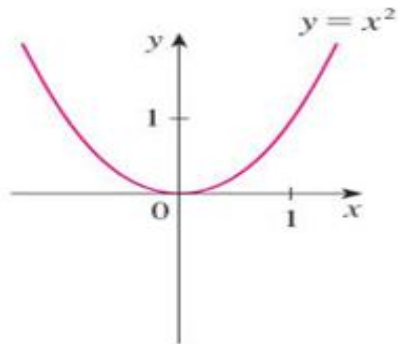
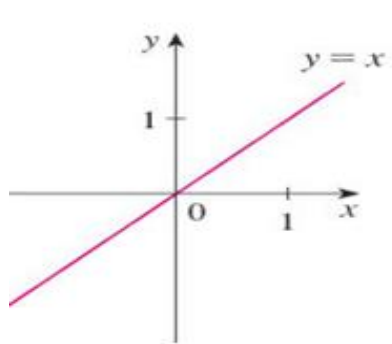


POWER FUNCTIONS

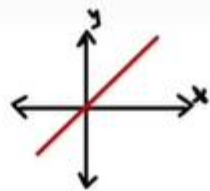
A function of the form $f(x) = x^a$, where a is constant, is called a power function.

$a = n$, where n is a positive integer

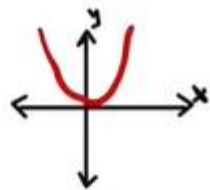
- The graphs of $f(x) = x^n$ for $n = 1, 2, 3, 4$, and 5 are shown.
- These are polynomials with only one term.
- We already know the shape of the graphs of $y = x$ (a line through the origin with slope 1) and $y = x^2$ (a parabola).



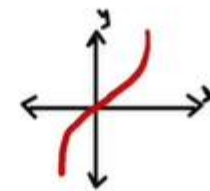
$$y = x$$



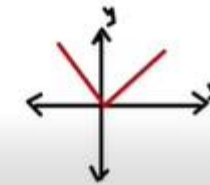
$$y = x^2$$



$$y = x^3$$

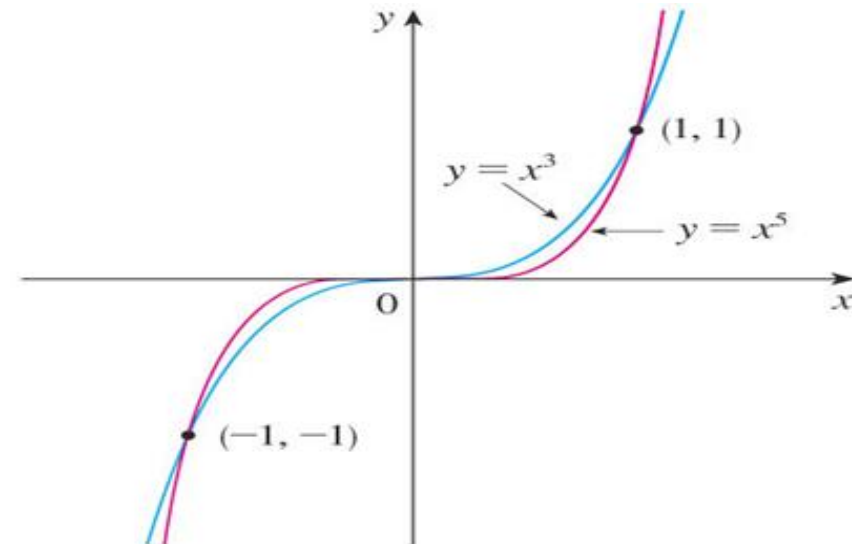
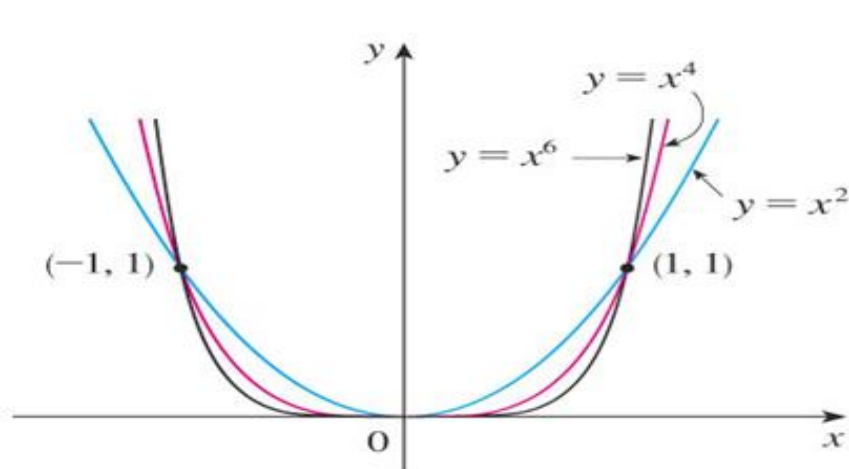


$$y = |x|$$



CASE

- The general shape of the graph of $f(x) = x^n$ depends on whether n is even or odd.
- If n is even, then $f(x) = x^n$ is an even function, and its graph is similar to the parabola $y = x^2$.
- If n is odd, then $f(x) = x^n$ is an odd function, and its graph is similar to that of $y = x^3$.
- However, notice from the figure that, as n increases, the graph of $y = x^n$ becomes flatter near 0 and steeper when $|x| \geq 1$. If x is small, then x^2 is smaller, x^3 is even smaller, x^4 is smaller still, and so on.

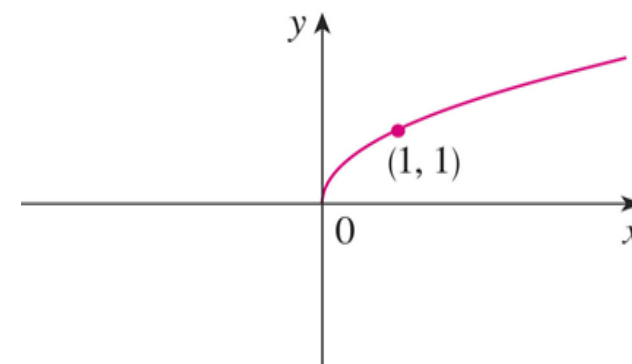


CASE

$a = 1/n$, where n is a positive integer

$$f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$

- The function $f(x) = \sqrt{x}$ is a root function.
- For $n = 2$, it is the square root function $[0, \infty)$, whose domain is and whose graph is the upper half of the parabola $x = y^2$.
- For other even values of n , the graph of $y = \sqrt[n]{x}$ is similar to that of $y = \sqrt{x}$.

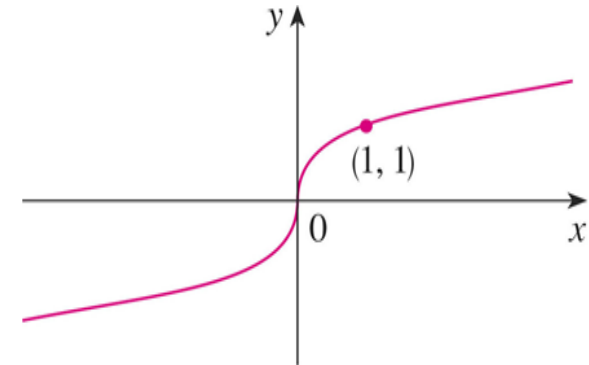


(a) $f(x) = \sqrt{x}$

CASE

For $n = 3$, we have the cube root function $f(x) = \sqrt[3]{x}$ whose domain is (recall that every real number has a cube root) and whose graph is shown.

- The graph of $y = \sqrt[n]{x}$ for n odd ($n > 3$) is similar to that of $y = \sqrt[3]{x}$.

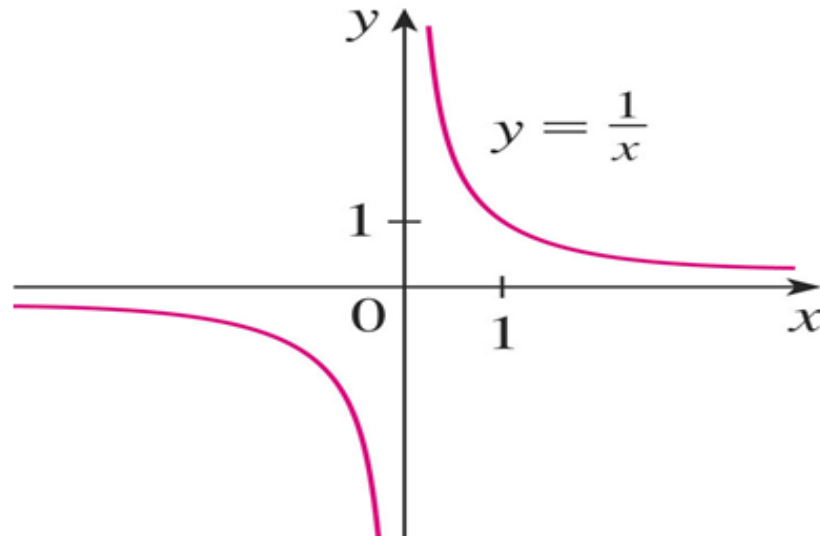


(b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

CASE

$$a = -1$$

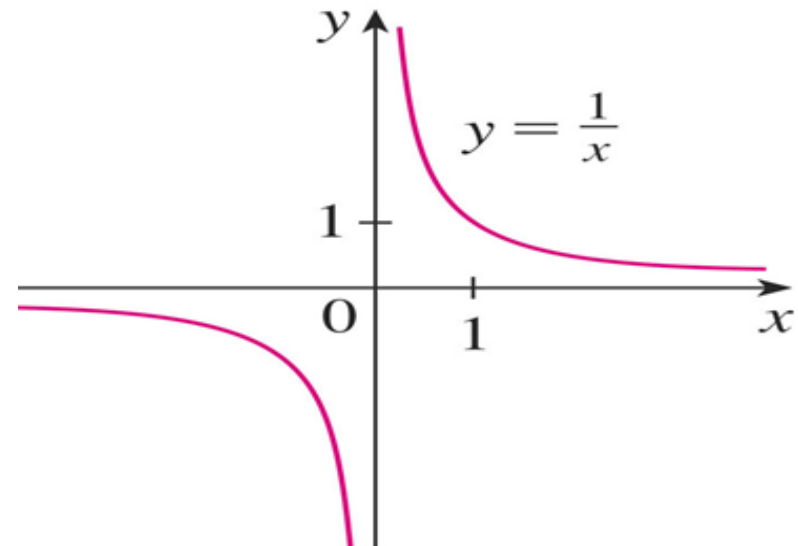
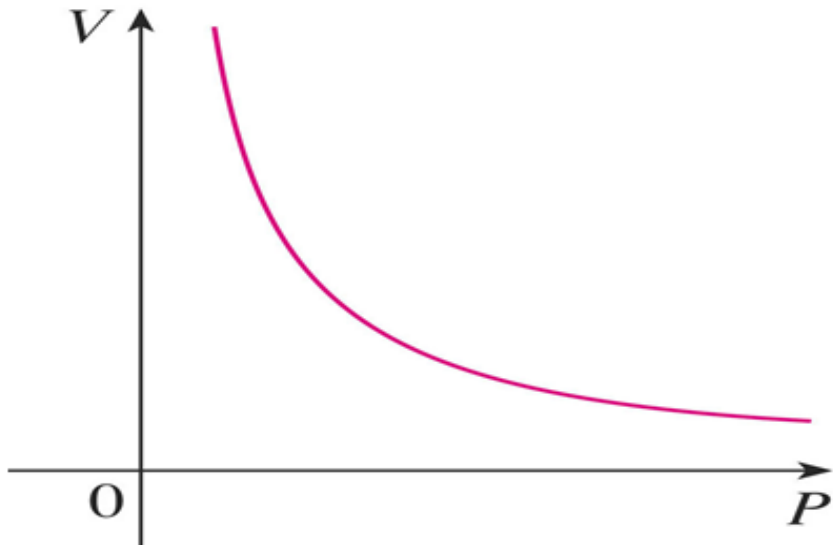
- The graph of the reciprocal function $f(x) = x^{-1} = 1/x$ is shown.
- Its graph has the equation $y = 1/x$, or $xy = 1$.
- It is a hyperbola with the coordinate axes as its asymptotes.



CASE

This function arises in physics and chemistry in connection with Boyle's Law, which states that, when the temperature is constant, the volume V of a gas is inversely proportional to the pressure P . $V=C/P$

where C is a constant. So, the graph of V as a function of P has the same general shape as the right half of the previous figure.

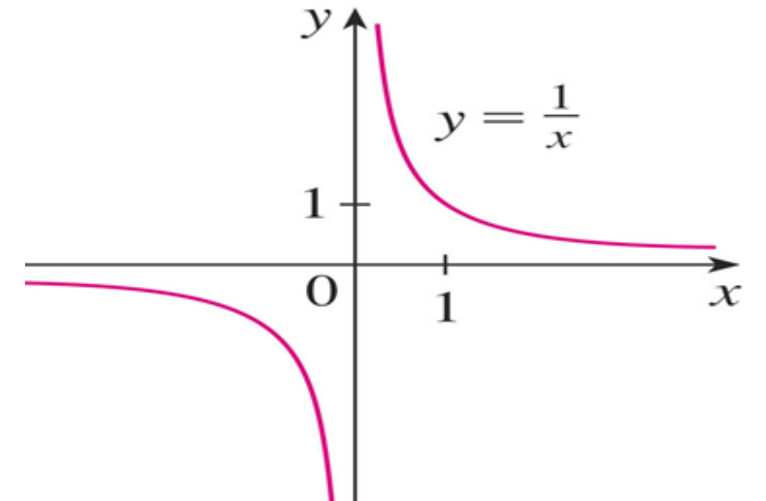


RATIONAL FUNCTIONS

A rational function f is a ratio of two polynomials $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

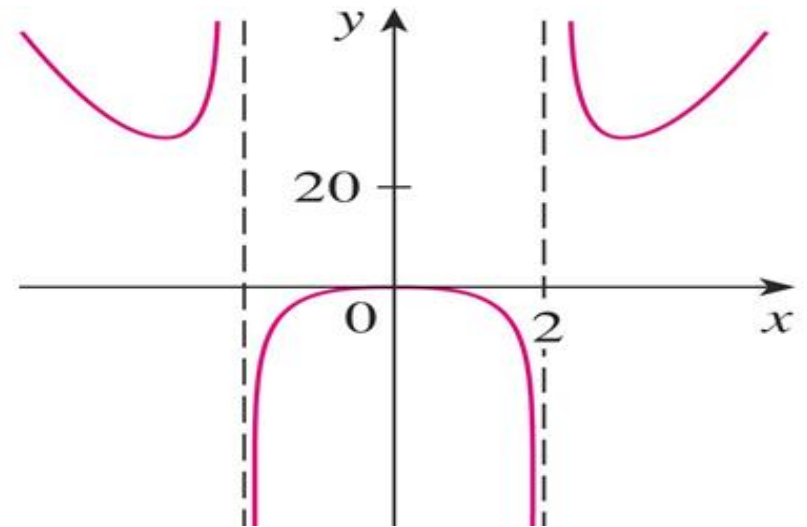
where P and Q are polynomials. The domain consists of all values of x such that $Q(x) \neq 0$.

A simple example of a rational function is the function $f(x) = 1/x$, whose domain is $\{x|x \neq 0\}$. This is the reciprocal function graphed in the figure.



RATIONAL FUNCTIONS

The function $f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$ is a rational function with domain $\{x \mid x \neq \pm 2\}$.



ALGEBRAIC FUNCTIONS

A function f is called an algebraic function if it can be constructed using algebraic operations—such as addition, subtraction, multiplication, division, and taking roots—starting with polynomials.

Any rational function is automatically an algebraic function.

Here are two more examples:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$g(x) = \frac{x^4 - 16x^2}{x + \sqrt{x}} + (x - 2)\sqrt[3]{x + 1}$$

ALGEBRAIC FUNCTIONS

An example of an algebraic function occurs in the theory of relativity.

- The mass of a particle with velocity v is

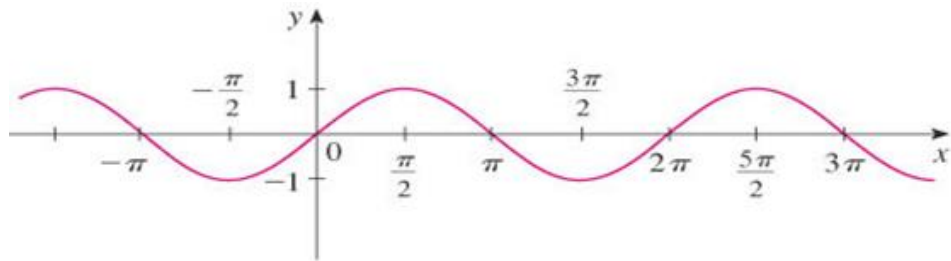
$$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

where m_0 is the rest mass of the particle and $c = 3.0 \times 10^8$ km/s is the speed of light in a vacuum.

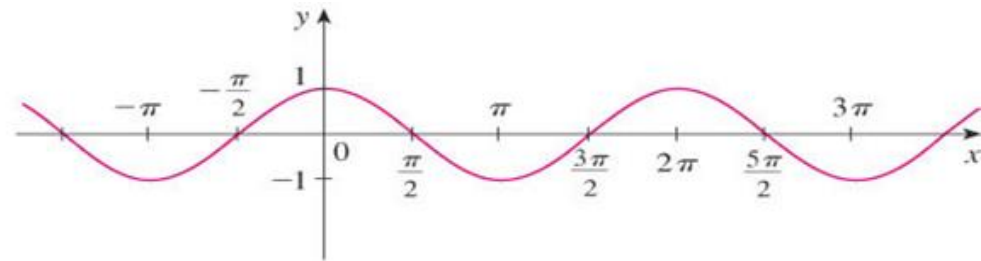
TRIGONOMETRIC FUNCTIONS

In calculus, the convention is that radian measure is always used (except when otherwise indicated).

- For example, when we use the function $f(x) = \sin x$, it is understood that $\sin x$ means the sine of the angle whose radian measure is x .
- Thus, the graphs of the sine and cosine functions are as shown in the figure.



(a) $f(x) = \sin x$



(b) $g(x) = \cos x$

TRIGONOMETRIC FUNCTIONS

- Also, the zeros of the sine function occur at the integer multiples of π . That is, $\sin x = 0$ when $x = n\pi$, n an integer.
- An important property of the sine and cosine functions is that they are periodic functions and have a period 2π . This means that, for all values of x , $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$.
- Notice that, for both the sine and cosine functions, the domain is $(-\infty, \infty)$ and the range is the closed interval $[-1, 1]$. Thus, for all values of x , we have: $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$. In terms of absolute values, it is: $|\sin(x)| \leq 1$, $|\cos(x)| \leq 1$.

TRIGONOMETRIC FUNCTIONS

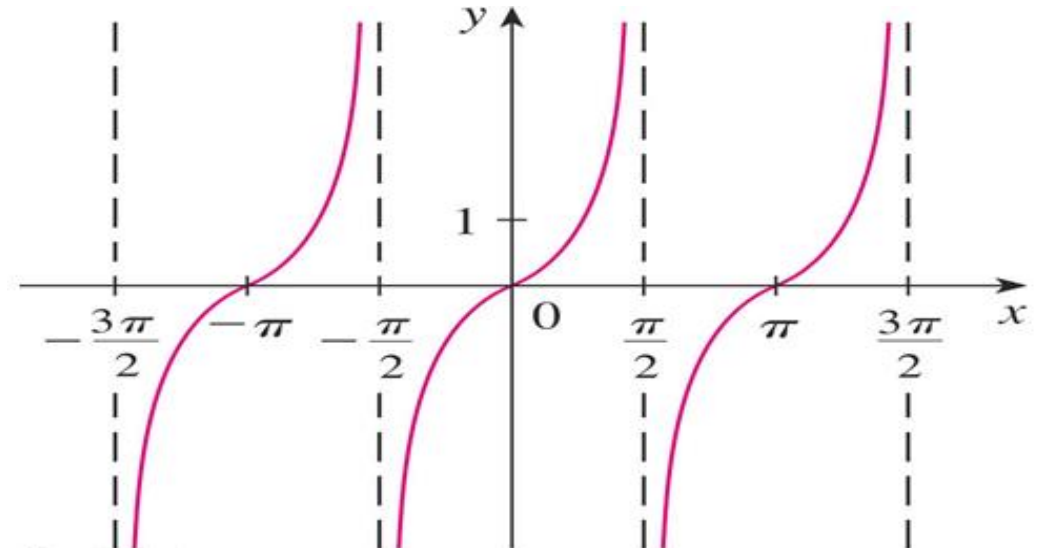
The periodic nature of these functions makes them suitable for modeling repetitive phenomena such as tides, vibrating springs, and sound waves.

For instance, in Example 4 in Section 1.3, we will see that a reasonable model for the number of hours of daylight in Philadelphia t days after January 1 is given by the function:

$$L(t) = 12 + 2.8 \sin \left[\frac{2\pi}{365} (t - 80) \right]$$

TRIGONOMETRIC FUNCTIONS

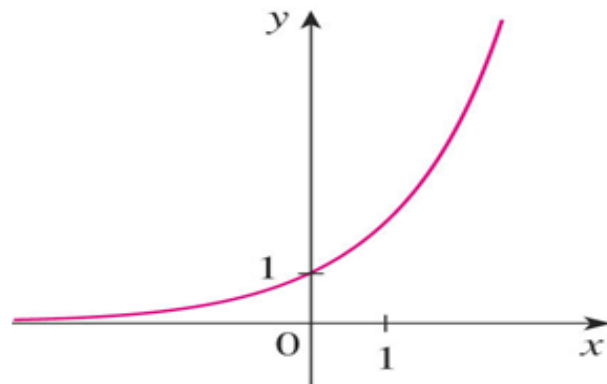
- The tangent function is related to the sine and cosine functions by the equation $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
- The tangent function is undefined whenever $\cos x = 0$, that is, when $x = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$
- Its range is $(-\infty, \infty)$. Notice that the tangent π function has period: $\tan(x+\pi) = \tan(x)$ for all x .
- The remaining three trigonometric functions—cosecant, secant, and cotangent—are the reciprocals of the sine, cosine, and tangent functions.



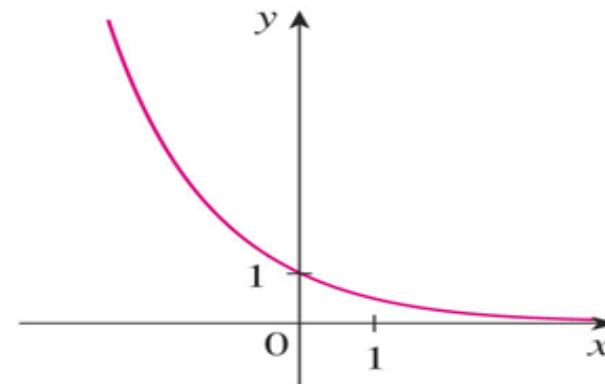
EXPONENTIAL FUNCTIONS

The exponential functions are the functions of the form $f(x)=a^x$, where the base a is a positive constant.

- The graphs of $y = 2^x$ and $y = (0.5)^x$ are shown.
- In both cases, the domain is $(-\infty, \infty)$ and the range is $(0, \infty)$.
- We will see that they are useful for modeling many natural phenomena—such as population growth (if $a > 1$) and radioactive decay (if $a < 1$).
- The logarithmic functions $f(x) = \log_a x$, where the base a is a positive constant, are the inverse functions of the exponential functions.



(a) $y = 2^x$

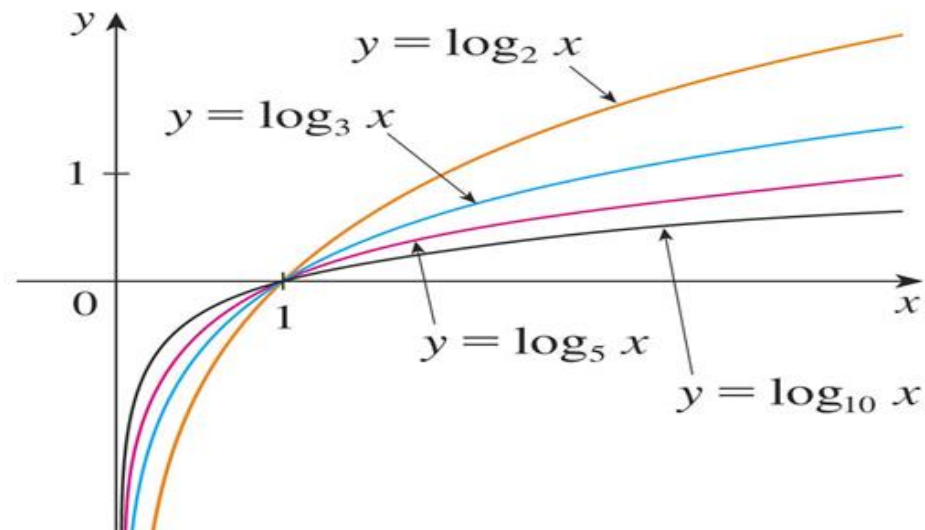


(b) $y = (0.5)^x$

LOGARITHMIC FUNCTIONS

The figure shows the graphs of four logarithmic functions with various bases.

- In each case, the domain is $(0, \infty)$, the range is $(-\infty, \infty)$, and the function increases slowly when $x > 1$.



TRANSCENDENTAL FUNCTIONS

Classify the following functions as one of the types of functions that we have discussed.

- $f(x) = 5^x$ is an exponential function. The x is the exponent
- $g(x) = x^5$ is a power function. The x is the base. We could also consider it to be a polynomial of degree 5.
- $u(t) = 1 - t + 5t^4$ is a polynomial of degree 4.

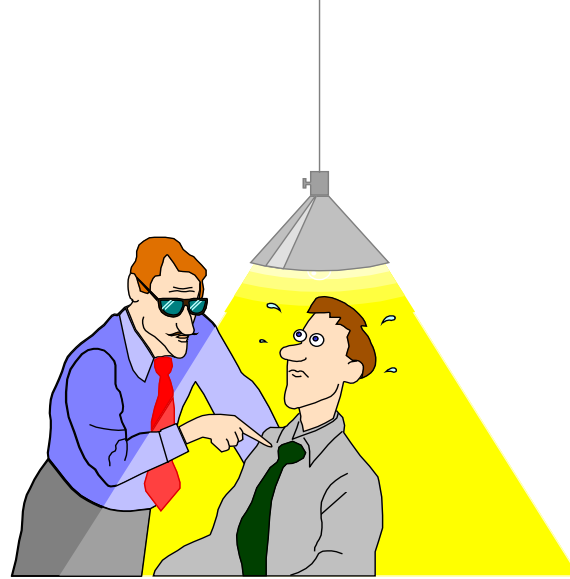
This is an algebraic function.

$$h(x) = \frac{1 + x}{1 - \sqrt{x}}$$

- Transandantal fonksiyonlar cebirsel olmayan fonksiyonlardır.
- Bu fonksiyonların kümesi, trigonometrik, ters trigonometrik, üstel ve logaritmik fonksiyonları içerir.
- Bununla birlikte, daha önce hiç adlandırılmamış çok sayıda başka işlevi de içerir.

Özümün uğraşısı bir kıvılcım çakmaktır.

Sorular?



Contact me at:
cahitkarakus@gmail.com

Kaynaklar

- Analog Electronics, Bilkent University
- Electric Circuits Ninth Edition, James W. Nilsson Professor Emeritus Iowa State University, Susan A. Riedel Marquette University, Prentice Hall, 2008.
- Lessons in Electric Circuits, By Tony R. Kuphaldt Fifth Edition, last update January 10, 2004.
- Fundamentals of Electrical Engineering, Don H. Johnson, Connexions, Rice University, Houston, Texas, 2016.
- Introduction to Electrical and Computer Engineering, Christopher Batten - Computer Systems Laboratory School of Electrical and Computer Engineering, Cornell University, ENGRG 1060 Explorations in Engineering Seminar, Summer 2012.
- Introduction to Electrical Engineering, Mulukutla S. Sarma, Oxford University Press, 2001.
- Basics of Electrical Electronics and Communication Engineering, K. A. NAVAS Asst.Professor in ECE, T. A. Suhail Lecturer in ECE, Rajath Publishers, 2010.
- İnternet ortamından sunum ve ders notları

Usage Notes

- These slides were gathered from the presentations published on the internet. I would like to thank who prepared slides.
- Also, these slides are made publicly available on the web for anyone to use
- If you choose to use them, I ask that you alert me of any mistakes which were made and allow me the option of incorporating such changes (with an acknowledgment) in my set of slides.

Sincerely,

Dr. Cahit Karakuş

cahitkarakus@gmail.com

Thank You